PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANTONIJA GUBERINA

GENERALIZACIJA APOLONIJEVA PROBLEMA

DIPLOMSKI RAD

Split, veljača 2018.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

GENERALIZACIJA APOLONIJEVA PROBLEMA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Antonija Guberina

Mentor:
prof. dr. sc. Nikola Koceić Bilan

Split, veljača 2018.

Uvod

Apolonije iz Perge (ca. 262. pne. - 190. pne.) je grčki matematičar nazvan "veliki geometar". Studirao je u Aleksandriji, gdje je učio od Euklidovih sljedbenika, radio u Efezu i Pergamu. U svom glavnom djelu *Elementi konika* u 15 knjiga temeljito je obradio teoriju presjeka stošca i to čisto geometrijskim pristupom. Njegovi su rezultati bili toliko potpuni i podrobni da se današnja euklidska geometrija nije mnogo odmakla od njegovih spoznaja. Sačuvane su prve četiri knjige na grčkom, tri na arapskom prijevodu, dok su ostale izgubljene. Prvi je za konike upotrijebio nazive elipsa i hiperbola (naziv parabola je prvi upotrijebio Arhimed) i ustanovio da se sve tri vrste presjeka mogu dobiti presijecanjem stošca ravninom.

Uz Apolonija su vezani pojmovi kao Apolonijeva kružnica, Apolonijeva mreža i Apolonijev problem. Geometrijsko mjesto točaka za koje je omjer udaljenosti od dvije različite točke konstantan je kružnica čije središte leži na pravcu AB i prolazi točkama M i N na pravcu AB koje dijele dužinu $\overline{AB}$ (iznutra i izvana) u danom omjeru. Kružnicu s tim svojstvom nazivamo Apolonijeva kružnica. U slučaju kada je omjer udaljenosti od dvije točke jednak 1, tada govorimo o simetrali dužine $\overline{AB}$.

U kombinatorici, Apolonijeva mreža je neusmjereni graf koji se dobije rekurzivnim dijeljenjem trokuta na tri manja trokuta. Može se geometrijski realizirati i to na način da se započme s tri kružnice koje se međusobno dodiruju, zatim upisati u prazninu koju čine još jednu koja dodiruje sve tri (Apolonijev problem), dalje se nastavlja rekurzivno za nove praznine koje kružnice čine.

Apolonijev problem je konstruktivni geometrijski zadatak što ga je prvi postavio i riješio Apolonije u djelu *Elementi konika*, a glasi:

Konstruiraj sve kružnice u ravnini koje dodiruju tri zadane kružnice.

Promatrajući uz kružnice još točke i pravce, Apolonijev problem možemo generalizirati na sljedeći način. Definirat ćemo Apolonijev problem reda n:

Neka je $M = \{K_\infty, P_\infty, T_\infty\}$ multiskup koji se sastoji od tri različita elementa beskonačne kratnosti: K koji označava kružnicu, P pravac i T točku.

Apolonijev problem reda $n, n \in N$, je konstruktivna zadaća u kojoj se traži kružnica koja dodiruje n zadanih elemenata multiskupa M. Ukupan broj različitih problema za Apolonijev problem reda n jednak je broju kombinacija s ponavljanjem $n - tog$ razreda multiskupa od 3 različita elementa $\binom{3+n-1}{n}$.

Za $n = 1$ tražimo kružnicu koja dodiruje samo jedan od elemenata multiskupa M. Za ovaj red dobijemo tri različita problema ($\binom{3+1-1}{1}=\binom{3}{1}=3$) i to: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu"; "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac"; "Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom".

Za $n = 2$ tražimo kružnicu koja dodiruje elemente određene kombinacijom s ponavljanjem reda 2 multiskupa M i to njih šest ($\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$): $(K,K), (P,P), (T,T), (K,P), (K,T), (P,T)$. Npr. za kombinaciju (K,K) problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice"; za kombinaciju (P,T) problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i prolazi zadanom točkom".

Za $n = 3$ tražimo kružnicu koja dodiruje elemente određene kombinaci-

jom s ponavljanjem reda 3 multiskupa M i to njih deset ($\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$): $(K,K,K),(P,P,P),(T,T,T),(K,P,T),(K,T,T),(P,T,T),(K,P,P),$ $(P,K,K),(P,P,T),(T,K,K)$. Npr. za kombinaciju (K,K,K) imamo originalni Apolonijev problem: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"; za kombinaciju (K,T,P) problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu, zadani pravac i prolazi zadanom točkom".
Za $n \geq 4$ problem je analogan prijašnjim slučajevima.
U ovom radu ćemo promatrati Apolonijev problem reda $n = 1,2,3$ i pokazati zašto nije interesantno promatrati Apolonijeve probleme reda većeg od 3. Zadaće je moguće riješiti euklidskom konstrukcijom (koristeći ravnalo i šestar), što ćemo u ovom radu pokazati i to koristeći metodu inverzije.
Međutim, razmatranje ovih problema, napose određivanje središta rješenja uz korištenje metode geometrijskih mjesta točaka, donijet će nam vrlo zanimljive i vrijedne geometrijske rezultate i izvan konteksta konstruktivne geometrije. Pokazat će se da dobivena geometrijska mjesta središta rješenja većine Apolonijevih problema predstavljaju jednu koniku. Stoga se svaka konika može alternativno definirati kao geometrijsko mjesto središta kružnica koje su rješenje određenog Apolonijevog problema.
U svrhu lakšeg praćenja teksta i njemu odgovarajućih slika, zadani elementi će biti plave, geometrijsko mjesto središta kružnica odgovarajućeg Apolonijevog problema tamnozelene, rješenje konstruktivne zadaće crvene, geometrijsko mjesto središta Apolonijevog reda nižeg od promatranog zelene i pomoćni elementi crne boje.

Sadržaj

Poglavlje 1

Metode konstruktivne geometrije

1.1 Konstruktivna geometrija u matematici

Prije Euklida stari su Grci u geometriji koristili isključivo tehnike konstruktivne geometrije, pri čemu određene tvrdnje nisu dokazivali već su ih smatrali neupitno istinitima i iz tih istina izvodili ostale zaključke. Euklid je sva ta znanja sistematizirao i postavio geometriju deduktivno uzimajući te neupitne istine za aksiome pomoću kojih je potom dokazivao sve ostale tvrdnje. Definirajući geometriju ravnine aksiomatski, Euklid ju je apstrahirao i odvojio od klasičnog modela u kojem je početno bila realizirana.

Tako je konstruktivna geometrija postala tek jedna od mogućih realizacija klasičnog modela geometrije, a klasični model tek jedan od mogućih modela geometrije.

Označimo sa π ravninu u klasičnom modelu euklidske geometrije. Bilo koji podskup ravnine π nazivamo geometrijskom fugurom ili kraće figurom ravnine π. Konstruirati neku figuru znači "nacrtati" tu figuru na crtaćoj plohi.

Svaki problem u kojem se traži konstrukcija figure sa zadanim svojstvima nazivamo konstruktivnom zadaćom. Rješenjem konstruktivne zadaće smatramo svaku figuru koja ima tražena svojstva postavljena u toj konstruktivnoj zadaći. Pri rješavanju konstruktivnih zadaća koristimo se nekim standardnim metodama koje uspješno pomažu pri konstrukciji rješenja konstruktivnih zadaća određenog tipa. To su: metoda presjeka (geometrijskih mjesta točaka), metoda izometrija (osna simetrija, centralna simetrija, translacija, rotacija), metoda homotetije, metoda sličnosti, algebarska metoda i metoda inverzije.

Rješavanje nekih geometrijskih problema može biti poprilično mukotrpno, dok rješavajući isti problem koristeći neku od prethodno navedenih metoda možemo uvelike pojednostavniti postupak rješavanja.

Primjer. Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine t_a, t_b i t_c njegovih težišnica.

Analiza: Neka je T težište trokuta $\triangle ABC$ i neka su P_1, P_2 i P_3 polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom. Translatirajmo točku T za vektor $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$, tj. neka je $T' = t_{AT}(T)$. Budući da je $|AT| = 2|TP_2|$ to je i $|TT'| = 2|TP_2|$ pa se četverokutu $TBT'C$ dijagonale raspolavljaju. Zaključujemo da je on paralelogram. Slijedi $|CT'| = |TB| = \frac{2}{3}t_b$, $|TT'| = \frac{2}{3}t_b$ i $|CT| = \frac{2}{3}t_c$. Trokut $\triangle TT'C$ možemo konstruirati.

Konstrukcija: Zadane su duljine težišnica t_a, t_b i t_c.

1° Podijelimo dužine duljina t_a, t_b i t_c na tri jednaka dijela.

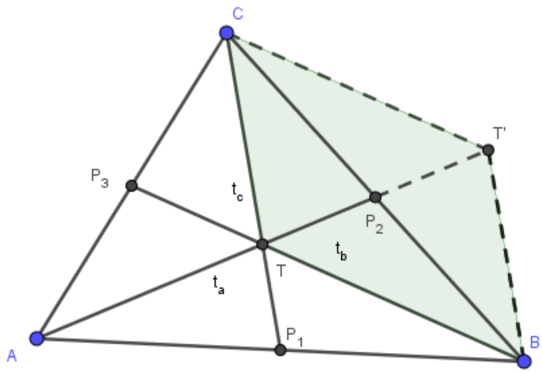
2° Konstrukcija trokuta $\triangle TT'C$.

3° Konstrukcija paralelograma $TBT'C$.

4° A je centralno simetrična slika od T' s obzirom na T

Trokut $\triangle ABC$ je traženi trokut.

Na elegantan način smo riješili ovaj problem korišteći metodu translacije.



Slika 1.1: Konstrukcija trokuta

Da smo problem rješavali koristeći alate trigonometrije, naišli bismo na nepotrebno dugi račun.
Konstruktivna geometrija nam pruža novi pogled na rješavanje problema, originalnost, logičko i stvaralačko mišljenje. Nije svrha samoj sebi, kao nešto lijepo nacrtati, već riješiti zadani zadatak. Često je konstruktivno rješenje i najelegantnije i ono obično daje putokaz za rješavanje i drugim tehnikama.
U ovom radu se bavimo rješavanjem konstruktivnih zadaća metodom inverzije.

1.2 Inverzija

Definicija 1.1 *Neka je u ravnini π dana kružnica c=k(O,r) i neka je π^* ravnina π bez središta kružnice c. Preslikavanje i: $\pi^* \to \pi^*$ naziva se inverzijom obzirom na kružnicu c ako vrijedi:*
(a) točke O, T i njoj pridružena točka T' su kolinearne
(b) točke T i T' su s iste strane točke O
(c) $|OT| \cdot |OT'|$=r^2

Uvodimo oznake: c za kružnicu inverzije, O za središte ili pol inverzije,

r za radijus inverzije, r^2 za potenciju inverzije.

Konstrukcija pridružene točke:

Razlikujemo dva slučaja:

(a) Neka je $T \in \pi^*$ izvan kružnice inverzije c:

1° c=$k(O,r), r>0$

2° $\overline{OT}$

3° P polovište dužine $\overline{OT}$

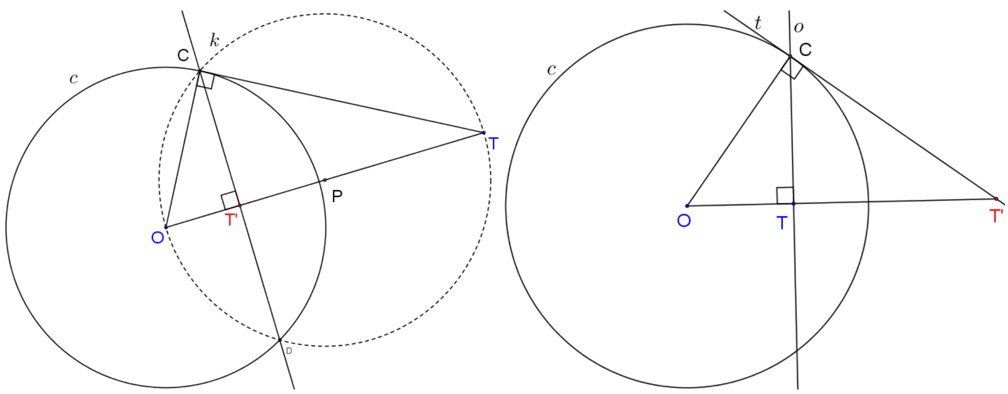
4° $k=k(P,\frac{1}{2}|OT|)$

5° $\{C,D\}$=$k\cap c$

6° $p=CD$

$7^\circ\{T'\}$=$p\cap OT$

Dokaz. Po poučku $K-K$ o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle OTC \sim \triangle OT'C$ ($\angle CT'O$=$\angle OCT$=90° te zajednički kut $\angle TOC$). To povlači $\frac{|OT|}{|OC|}$=$\frac{|OC|}{|OT'|}$, iz čega slijedi $|OT|\cdot|OT'|$=$|OC|^2=r^2$. ■



(a) točka T izvan kružnice

(b) točka T unutar kružnice

Slika 1.2: Konstrukcija točke inverzije

(b) Neka je $T \in \pi^*$ unutar kružnice inverzije c:

1° c=$k(O,r), r>0$

2° $\overline{OT}$

3° o okomica kroz T na dužinu $\overline{OT}$

4° $C \in k \cap o$

5° t okomica kroz C na dužinu $\overline{OC}$

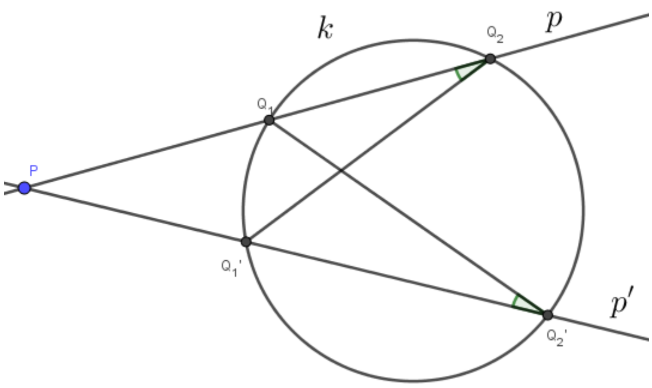
6° $\{T'\}=t \cap OT$

Dokaz. Analogan slučaju (a). ■

Propozicija 1.2 *Neka je $k = k(S, r)$ kružnica i $P \in \pi \backslash k$ točka. Neka je p proizvoljan pravac koji siječe kružnicu k u točkama Q_1 i Q_2 i prolazi kroz P. Tada umnožak $|PQ_1| \cdot |PQ_2|$ ne ovisi o pravcu p.*

Dokaz. Razlikujemo više slučajeva:

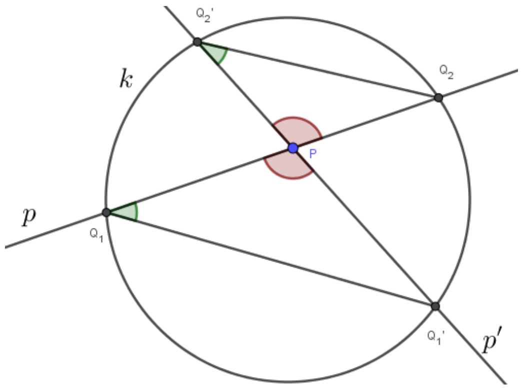
a) Neka se P nalazi izvan kružnice i neka je p' pravac koji prolazi točkom P i siječe kružnicu k u točkama Q_1' i Q_2'.



Slika 1.3: Slučaj a)

Budući da su kutovi $\angle Q_1Q_2'P$ i $\angle PQ_2Q_1'$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{Q_1Q_1'}$, to vrijedi $\angle PQ_2Q_1' = \angle Q_1Q_2'P$. Po poučku $K-K$ o sličnosti slijedi $\triangle PQ_2'Q_1 \sim \triangle PQ_1'Q_2$ (zajednički kut $Q_1'PQ_1$) pa vrijedi $\frac{|PQ_2'|}{|PQ_2|} = \frac{|PQ_1|}{|PQ_1'|}$. Zaključujemo $|PQ_2'| \cdot |PQ_1'| = |PQ_2| \cdot |PQ_1|$.

b) Neka se P nalazi unutar kružnice i neka je p' pravac koji prolazi točkom P i siječe kružnicu k u točkama Q_1' i Q_2'.



Slika 1.4: Slučaj b)

Budući da su kutovi $\angle Q_1'Q_1P$ i $\angle PQ_2'Q_2$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{Q_1'Q_2}$, to vrijedi $\angle PQ_2Q_1' = \angle Q_1Q_2'P$. Kutovi $\angle Q_2PQ_2'$ i $\angle Q_1PQ_1'$ su vršni pa su jednake veličine. Po poučku $K - K$ o sličnosti slijedi $\triangle PQ_2Q_2' \sim \triangle PQ_1Q_1'$ pa vrijedi $\frac{|PQ_2'|}{|PQ_2|} = \frac{|PQ_1|}{|PQ_1'|}$. Zaključujemo $|PQ_2'| \cdot |PQ_1'| = |PQ_2| \cdot |PQ_1|$.

c) Neka se P nalazi izvan kružnice i neka vrijedi da je p tangenta kružnici k i da je p' pravac koji prolazi središtem kružnice k. Označimo dodirnu točku pravca p i k sa $Q_1(= Q_2)$. Budući da je $\angle PQ_1S = 90°$, to vrijedi Pitagorin poučak za $\triangle PSQ_1$: $|PQ_1|^2 = |PS|^2 - r^2 = (|PS| - r)(|PS| + r) = |PQ_1'| \cdot |PQ_2'|$. Ako promatramo proizvoljni pravac p'' koji prolazi kroz P i siječe kružnicu u dvije točke, po 1° (promatrajući pravce p' i p''), tvrdnja vrijedi. ■

Umnožak duljina odsječaka iz propozicije nazivamo **potencija točke P obzirom na kružnicu**.

Svojstva inverzije:

(1) **Svaka točka kružnice inverzije je fiksna.**

Slijedi iz definicije, tj. svojstava (a), (b) i (c).

(2) **Inverzija je involucija, odnosno vrijedi** $i \circ i = \mathbb{1}_{\pi}*$ **pa je stoga i bijekcija.**

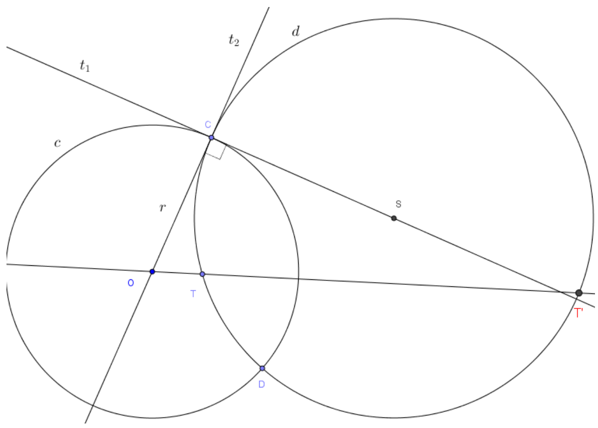
Slijedi iz same definicije inverzije, a i iz same konstrukcije inverznih točaka te svojstva (1).

(3) **Pravac koji prolazi polom inverzije (osim samog pola) preslikava se u samog sebe kao figura.**

Slijedi iz svojstva (a).

(4) **Kružnica koja je ortogonalna na kružnicu inverzije preslikava se u samu sebe kao figura.**

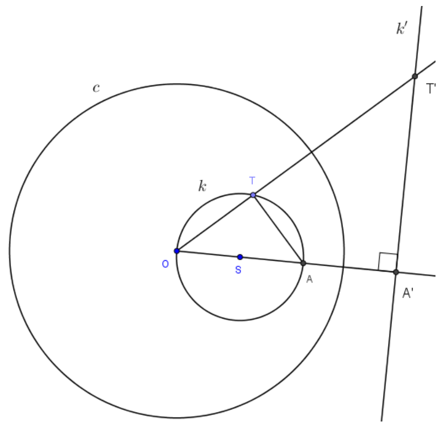
Dokaz. Neka je $c = k(O, r)$ kružnica inverzije i kružnica d sa središtem u



Slika 1.5: Svojstvo inverzije (4)

S njoj ortogonalna. Neka je T proizvoljna točka kružnice d te $T' \in d \cap OT$. Svojstva (a) i (b) vrijede. Pokažimo za svojstvo (c): Po Propoziciji 1.2 slijedi $|OC| \cdot |OC| = |OT| \cdot |OT'|$ pa je $|OT| \cdot |OT'| = r^2$. ■

(5) **Svaka kružnica koja prolazi polom inverzije i ne siječe kružnicu inverzije preslikava se u pravac koji je paralelan tangenti te kružnice u polu i udaljen od O za $\frac{r^2}{2p}$, gdje je p polumjer kružnice k.**



Slika 1.6: Svojstvo inverzije (5)

Dokaz. Neka je $c = k(O, r)$ kružnica inverzije i k kružnica sa središtem u S koja prolazi polom inverzije i ne siječe c. Neka je $A \in k \cap OS$ te A' njoj inverzna točka. Kroz A' povucimo okomicu k' na pravac OS. Pokažimo da vrijedi $i(k) = k'$:

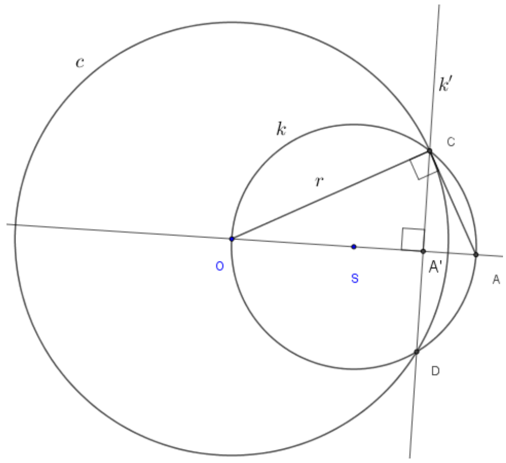
Neka je $T \in k \backslash \{O, A\}$ i $T' \in k' \cap OT$. Po poučku $K - K$ o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle OAT \sim \triangle OA'T'$ ($\angle OTA = \angle T'A'O = 90°$ i zajednički kut $\angle AOT$). Stoga je $\frac{|OA|}{|OT|} = \frac{|OT'|}{|OA'|}$, to povlači $|OT'| \cdot |OT| = |OA'| \cdot |OA| = r^2$. Dakle, $T' = i(T)$. Slijedi $|OA'| = \frac{r^2}{|OA|} = \frac{r^2}{2p}$. ■

(6) **Svaki pravac koji ne siječe kružnicu inverzije preslikava se u kružnicu koja prolazi polom inverzije.**

Vrijedi po (5) jer je inverzija involucija.

(7) **Svaka kružnica koja prolazi polom inverzije i siječe kružnicu inverzije preslikava se u pravac koji prolazi sjecištima.**

Dokaz. Neka je $c = k(O, r), r > 0$ kružnica inverzije i k kružnica koja ju



Slika 1.7: Svojstvo inverzije (7)

siječe u točkama C i D. Povucimo pravac OS i neka je $\{O, A\} = k \cap OS$. Budući da je S polovište dužine $\overline{OA}$, a $k = (S, |OS|)$ po konstrukciji inverzne točke, $CD \cap OA = \{A'\}$ je inverzna točka od A.

Budući da je $\triangle DCO$ jednakokračan i $|DA'| = |A'C|$, to je $\angle OA'D = \angle CA'O = 90°(*)$. Po K - K poučku o sličnosti trokuta slijedi $\triangle OAC \sim \triangle OA'C$ ($(*)$ i zajednički kut $\angle AOC$). To povlači $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OA'|}{|OC|}$ pa je $|OA| \cdot |OA'| = |OC| \cdot |OC| = r^2$.

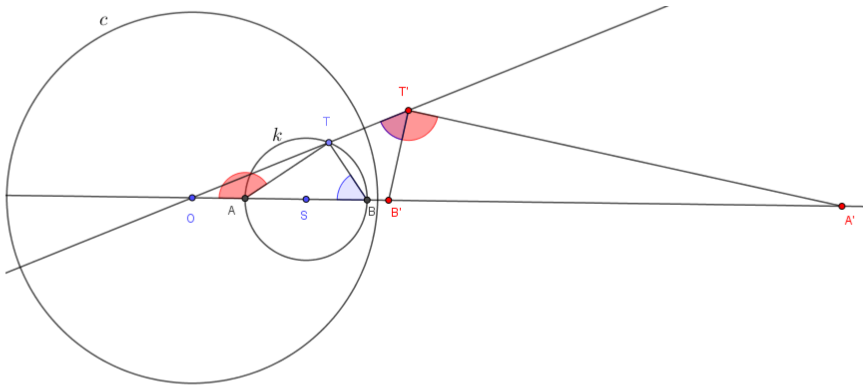
Neka je $T \in k$ proizvoljna točka i $\{T'\} = OT \cap CD$. Lako se pokaže da je $\triangle OTA \sim \triangle OT'A'$ pa vrijedi $\frac{|OA|}{|OT|} = \frac{|OT'|}{|OA'|} = |OA| \cdot |OA'| = |OT| \cdot |OT'| = r^2$ iz čega slijedi $T' = i(T)$. ■

(8) **Svaki pravac koji siječe kružnicu inverzije i ne prolazi polom preslikava se u kružnicu koja prolazi polom inverzije i sjecištima tog pravca s kružnicom inverzije.**

Vrijedi zbog (7) jer je inverzija involucija.

(9) **Svaka kružnica koja ne prolazi polom inverzije preslikava se opet u kružnicu.**

Dokaz. Neka je $c = k(O, r), r > 0$ kružnica inverzije, k kružnica sa središtem u S koja ne prolazi kroz O. Neka je $\{A, B\} = OS \cap k$ te $A' = i(A), B' = i(B)$ i $T' = i(T)$, za proizvoljan $T \in k$.



Slika 1.8: Svojstvo inverzije (9)

Pokažimo da je $\angle B'T'A'$ =90°.

Iz $|OT| \cdot |OT'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2$, slijedi $\frac{|OT|}{|OA|} = \frac{|OA'|}{|OT'|}(*)$. Po $S - K - S$ poučku o sličnosti trokuta zaključujemo $\triangle OTA \sim \triangle OA'T'$ ($(*)$ i zajednički kut $\angle AOT$) to povlači $\angle TAO = \angle OT'A'$. Analogno se pokaže da vrijedi $\angle TBO = \angle OT'B'$. Sada je $\angle B'T'A' = \angle OT'A' - \angle OT'B' = (180° - \angle BAT) - \angle TBO = \angle ATB = 90°$. Stoga T' leži na kružnici s promjerom $\overline{B'A'}$. Dakle, k se preslikava u kružnicu s promjerom $\overline{B'A'}$.

■

(10) **Inverzija je konformno preslikavanje (čuva kut između krivulja).**

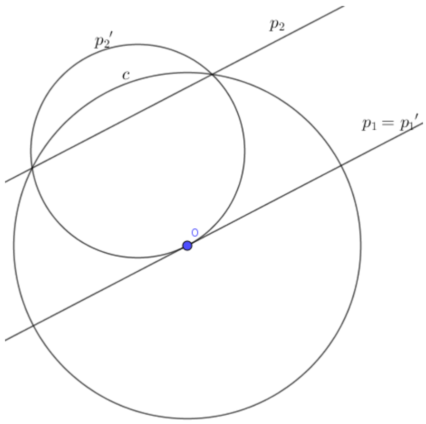
Dokaz. Dovoljno je pokazati da inverzija čuva kut između pravaca. Razlikujemo tri slučaja:

1. Pravci prolaze polom inverzije O.

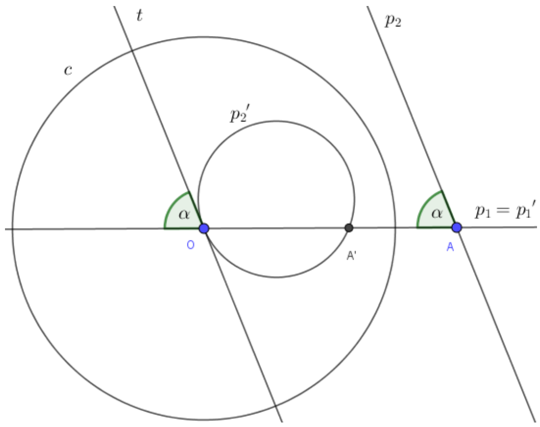
Tvrdnja za ovaj slučaj slijedi po svojstvu (3).

2. Jedan pravac prolazi polom inverzije O, a drugi ne.

Neka je p_1 pravac koji prolazi, a p_2 pravac koji ne prolazi polom inverzije. Neka su $p_1' = i(p_1)$ i $p_2' = i(p_2)$. Po svojstvu (3) je $p_1 = p_1'$ te , a p_2' je po svojstvu (8) (ili (6)) kružnica koja prolazi polom inverzije.



(a) Paralelni pravci



(b) Pravci se sijeku

Slika 1.9: Slučaj 2

Razlikujemo dva podslučaja:

2a) Pravci p_1 i p_2 su paralelni. Tada je kut $\angle(p_1, p_2) = 0°$. Budući da p_2' prolazi kroz O, po svojstvima inverzije (2) i (5) slijedi da je pravac $i(p_2') = p_2$ paralelan s tangentom kružnice p_2' koja prolazi kroz O, a time i s pravcem p_1. Sada iz $p_1 = p_1'$ slijedi da je $\angle(p_1', p_2') = 0°$.

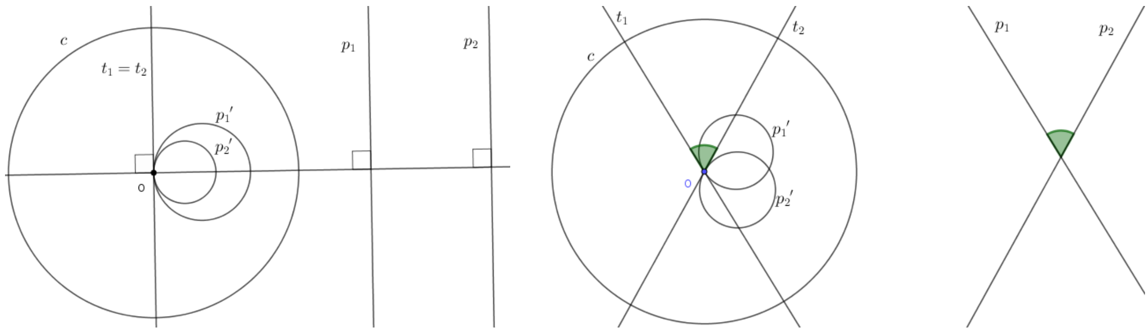
2b) Pravci p_1 i p_2 se sijeku. Neka je A njihovo sjecište i neka je $\angle(p_1, p_2) = \alpha$. Po svojstvu (5), p_2 je paralelan s tangentom t kružnice p_2' u točki O. Dakle, $\angle(t, p_1) = \angle(p_1, p_2) = \alpha$, odnosno $\angle(p_1', p_2') = \alpha$.

3. Niti jedan od pravaca ne prolazi centrom inverzije. I ovdje ralikujemo

dva podslučaja:

3a) Pravci su paralelni. U tom slučaju je tvrdnja trivijalna, jer je $\angle(p_1, p_2) = \angle(t_1, t_2) = \angle(p_1', p_2') = 0°$, gdje su t_1 i t_2 tangente u točki O na kružnice p_1 i p_2 redom. Naime, $t_1 \parallel p_1$ i $t_2 \parallel p_2$ pa zbog $p_1 \parallel p_2$ vrijedi $t_1 \parallel t_2$.

3b) Pravci se sijeku. Tada su p_1' i p_2' kružnice koje prolaze polom inverzije, a pravci p_1 i p_2 paralelni s tangentama t_1 i t_2 kružnica p_1' i p_2', redom. Dakle, $\angle(p_1, p_2) = \angle(t_1, t_2) = \angle(p_1', p_2')$.



(a) Paralelni pravci (b) Pravci se sijeku

Slika 1.10: Slučaj 3

■

Poglavlje 2

Apolonijevi problemi

2.1 Apolonijev problem reda 1

U ovom odjeljku razmatramo probleme koji spadaju u Apolonijev problem reda 1. Za svaki problem ćemo odrediti geometrijsko mjesto središta svih rješenja.

1. Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je A zadana točka te $T \neq A$ proizvoljna točka ravnine π. Kružnica s traženim svojstvom je $k = k(T, |AT|)$. Budući da je T proizvoljna točka ravnine, kružnica s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je $\pi \setminus \{A\}$.

2. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je p zadani pravac i $T \notin p$. Iz točke T spustimo okomicu o na p te sjecište tih pravaca označimo sa P ($p \cap o = \{P\}$). Kružnica s traženim svojstvom je $k = k(T, |PT|)$. Budući da je T proizvoljna točka ravnine, kružnica s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je $\pi \setminus p$.

3. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je $k = k(S, r)$, gdje je r proizvoljan pozitivan realan broj, zadana kružnica te T proizvoljna točka ravnine $\pi \setminus k$. Neka je $ST \cap k = \{T_1, T_2\}$. Neka je T_1 s iste strane točke S kao i T. Kružnica s traženim svojstvom je $k_1 = k(T, |T_1T|)$. Budući da je T proizvoljna točka ravnine, kružnica s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je $\pi \setminus k$.

2.2 Apolonijev problem reda 2

U ovom odjeljku razmatramo probleme koji spadaju u Apolonijev problem reda 2. Za svaki problem ćemo odrediti geometrijsko mjesto središta svih rješenja.

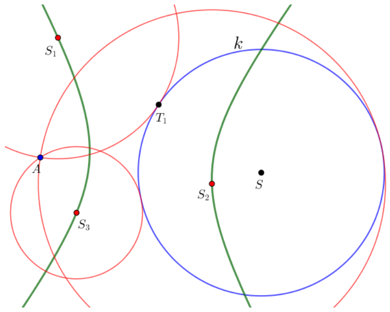
1. Konstruiraj kružnicu koja prolazi dvjema zadanim točkama i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka su A i B zadane točke te $A \neq B$. Kako središte tražene kružnice treba biti jednako udaljeno od A i B, to središte leži na simetrali dužine $\overline{AB}$, iz čega slijedi da tih kružnica ima beskonačno mnogo. Neka je T proizvoljna točka simetrale dužine $\overline{AB}$. Tada je $k(T, |TA|)$ kružnica s traženim svojstvom. Dakle, geometrijsko mjesto središta rješenja je simetrala dužine $\overline{AB}$. U slučaju kada je $A = B$ zadatak se svodi na prvi slučaj Apolonijeva problema reda 1.

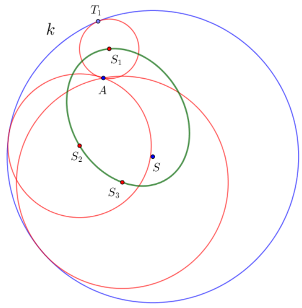
2. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu i prolazi zadanom točkom te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je zadana točka A i kružnica $k = k(S, r)$, gdje je r proizvoljan pozitivan realan broj te neka se A nalazi izvan k. Neka je $T_1 \in k$ proizvoljna točka. Neka je $ST_1 \cap s = \{S_1\}$, gdje je s simetrala dužine $\overline{AT_1}$. Tada je $k_1 = k(S_1, |S_1T_1|)$ kružnica s traženim svojstvom. Budući da je T_1 proizvoljna točka kružnice k, to takvih kružnica ima beskonačno monogo i vrijedi $||S_1A| - |S_1S|| = ||S_1A| - (|S_1T_1| + |T_1S)|| = |T_1S| = r$, za svaki $T_1 \in k$ i S_1 konstruiranu na prethodno opisani način. Taj zaključak nam govori da je geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom podskup hiperbole $H(A, S, \frac{r}{2})$ sa žarištima A i S i realnom poluosi $\frac{r}{2}$: $H = \{T \in \pi : ||AT| - |ST|| = r\}$. Pokažimo drugu inkluziju, tj. neka je $T \in H(A, S, \frac{r}{2})$. Tada je $r = ||TS| - |TA||$, odnosno $r = |TS| - |TA|$ ili $r = -|TS| + |TA|$ iz čega slijedi $|TS| = |TA| + r$ ili $|TA| = |TS| + r$. U oba slučaja je $k_1 = k(T, |TA|)$ kružnica s traženim svojstvom (u prvom slučaju dodiruje zadanu kružnicu izvana, a u drugom iznutra) pa vrijedi da je hiperbola $H(A, S, \frac{r}{2})$ podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

U slučaju kada se A nalazi unutar kružnice k geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je elipsa sa žarištima A i S, $E(A, S, \frac{r}{2})$: $E = \{T \in \pi : ||AT| + |ST|| = r\}$. Naime, neka je T središte kružnice $k_2 = k(T, r_1)$ s traženim svojstvom koja k dodiruje u P. Tada vrijedi $r = |PT| + |TS| = |AT| + |TS|$ jer k_2 prolazi kroz A. Dakle, T pripada elipsi $E(A, S, \frac{r}{2})$. Pokaimo i drugu inkluziju, tj. neka je $T \in E(A, S, \frac{r}{2})$. Tada je $|TA| + |TS| = r$. Kružnica $k_1 = k(T, |TA|)$ je kružnica s traženim svojstvom pa je T središte tražene kružnice.



(a) Točka A je izvan kružnice k



(b) Točka A je unutar kružnice k

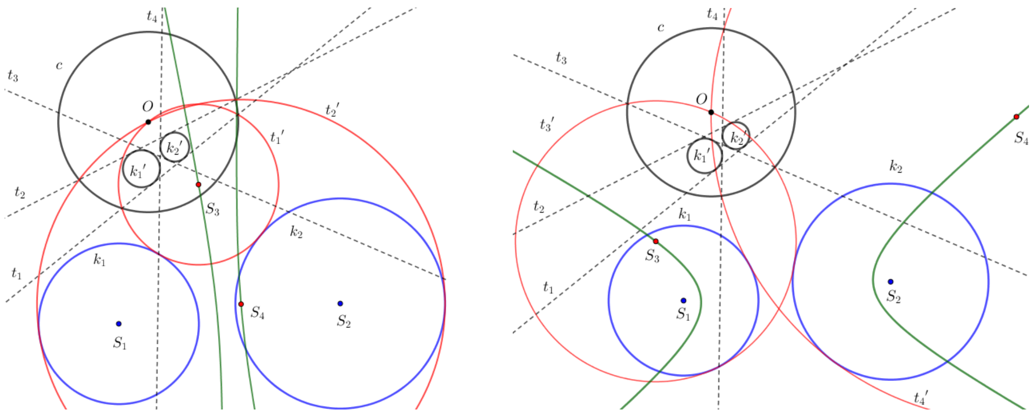
Slika 2.1: Konstrukcija kružnice koja dodiruje kružnicu k i prolazi točkom A

U slučaju kada vrijedi $A \in k$, geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je pravac AS bez točke A.
Inverzijom možemo jednostavnije konstruirati rješenje na sljedeći način: Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj i $k' = i(k)$. Inverzna slika bilo koje tangente na k', koja ne prolazi kroz A, je rješenje problema. Zaista, neka je t tangenta kružnice k' koja ne prolazi kroz A. Tada je kut koji zatvaraju t i k' jednak 0° i $i(t) = t'$ kružnica koja prolazi polom inverzije A. Budući da je inverzija konformno preslikavanje i involucija, vrijedi $\angle(t, k') = \angle(i(t), i(k')) = \angle(t', k)$. U slučaju da je $A \in k$ tražena rješenja su inverzne slike pravaca paralelnih s $k' = i(k)$.

3. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.
Neka su $k_1 = k(S_1, r_1), k_2 = k(S_2, r_2)$, gdje su r_1, r_2 pozitivni realni brojevi, zadane kružnice te neka se ne sijeku i ne leže jedna unutar druge. Odaberimo proizvoljnu točku O izvan tih kružnica i označimo s $c = k(O, \rho)$, gdje je ρ pozitivan realan broj, kružnicu inverzije. Neka su k_1' i k_2' inverzne slike kružnica k_1 i k_2 redom te t_1, t_2, t_3 i t_4 zajedničke tangente kružnica k_1' i k_2'.

Kružnice s traženim svojstvom su inverzne slike tih tangenti, označimo ih t_1', t_2', t_3' i t_4'. Neka t_1' dodiruje kružnice k_1 i k_2 izvana, t_2' iznutra, t_3' i t_4' jednu od kružnica izvana, a drugu iznutra. Budući da je O proizvoljna točka izvan zadanih kružnica, zaključujemo da svakom točkom izvan k_1 i k_2 prolazi neko rješenje zadaće.

Središta kružnica t_1' i t_2' leže na hiperboli sa žarištima S_1 i S_2 i realnom poluosi $\frac{|r_1-r_2|}{2}$, $H(S_1, S_2, \frac{|r_1-r_2|}{2})$: $H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$. Naime, neka je T središte kružnice koja dodiruje zadane kružnice izvana (iznutra), radijusa r. Tada vrijedi $||TS_1| - |TS_2|| = ||r + r_1| - |r + r_2|| = |r_1 - r_2|$ ($||TS_1| - |TS_2|| = ||r - r_1| - |r - r_2|| = | - r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|$), tj. $T \in H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$. Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je hiperbola $H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$ podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.



(a) Kružnice koje dodiruju zadane kružnice izvana ili iznutra

(b) Kružnice koje dodiruju zadane kružnice izvana i iznutra

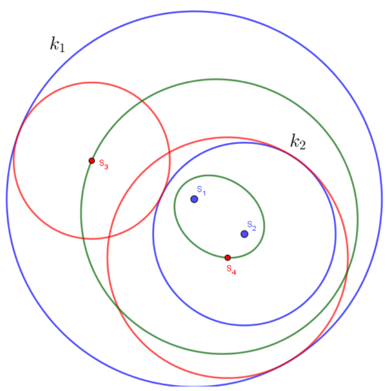
Slika 2.2: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije zadane kružnice

Središta kružnica k_3' i k_4' leže na hiperboli sa žarištima S_1 i S_2 i realnom poluosi $\frac{r_1+r_2}{2}$, $H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$. Naime, neka je T središte kružnice koja dodiruje zadane kružnice izvana (iznutra), radijusa r. Tada vrijedi $||TS_1| - |TS_2|| = ||r-r_1|-|r+r_2|| = |-r_1-r_2| = r_1+r_2 (||TS_1|-|TS_2|| = ||r+r_1|-|r-r_2|| = r_1 + r_2)$, tj. $T \in H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$. Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je $H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$ podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

U slučaju kada se kružnice k_1 i k_2 sijeku, tada njihove slike k_1' i k_2' imaju samo zajedničke vanjske tangente (t_1 i t_2).

Ako se k_1 i k_2 dodruju izvana, onda njihove slike k_1' i k_2' imaju jednu zajedničku unutarnju tangente (t_3 ili t_4) te zajedničke vanjske tangente (t_1 i t_2) pa tražene kružnice dodiruju k_1 i k_2 obje iznutra ili obje izvana.

Kada se jedna od zadanih kružnica nalazi unutar druge zadane kružnice (bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da se k_2 nalazi unutar k_1), rješenja konstruiramo na analogan način samo što tada nema slučaja da tražena kružnica dodiruje k_1 i k_2 obje izvana i obje iznutra. Središta takvih kružnica nalaze se na elipsi sa žarištima S_1 i S_2 i to $E(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$, kada tražena kružnica dodiruje izvana k_2, i $E(S_1, S_2, \frac{|r_2-r_1|}{2})$, kada tražena kružnica dodiruje iznutra k_2.



Slika 2.3: Geometrijsko mjesto kružnica koje dodiruju zadane kružnice

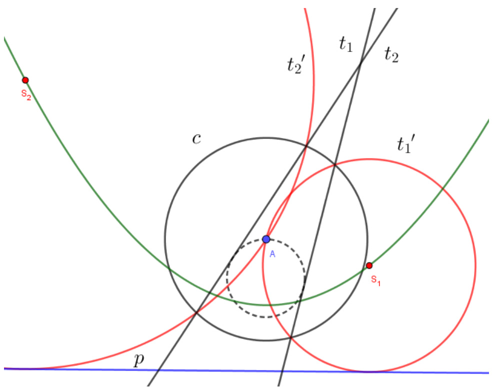
Ako je $r_1 = r_2$ i $k_1 \neq k_2$, geometrijsko mjesto središta rješenja je simetrala dužine $\overline{S_1S_2}$.

Ako je $k_1 = k_2$, problem se svodi na 3. slučaj Apolonijeva problema reda 1.

4. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i prolazi zadanom točkom te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je p zadani pravac i A zadana točka te neka vrijedi $A \notin p$. Postoji beskonačno mnogo rješenja: Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije. Inverzna slika pravca $p' = i(p)$ je kružnica (po svojstvima inverzije (6) i (8)). Inverzna slika bilo koje tangente na p' koja ne prolazi polom A je kružnica s traženim svojstvom.

Središte tražene kružnice treba biti jednako udaljeno od A i od p, tj. središta leže na paraboli s ravnalicom p i žarištem A. Naime, vrijedi i druga inkluzija. Neka je T proizvoljna točka koja leži na paraboli s ravnalicom p i žarištem A. Tada je $k(T, |TA|)$ kružnica s traženim svojstvom.



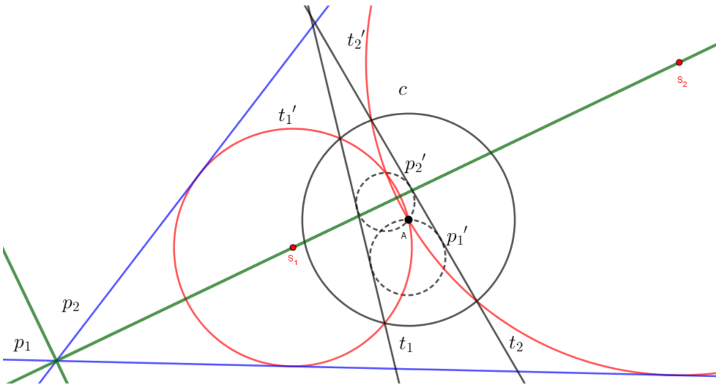
Slika 2.4: Konstrukcija kružnice koja dodiruje zadani pravac p i točku A

Dakle, tih kružnica ima beskonačno mnogo.

U slučaju kada vrijedi $A \in p$, geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je okomica o na p kroz A, tj. $o \setminus \{A\}$.

5. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dva zadana pravca te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka su p_1 i p_2 zadni pravci te $p_1 \neq p_2$ i $p_1 \nparallel p_2$. Odaberimo proizvoljnu točku A koje ne pripada zadanim pravcima. Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je $\rho > 0$ proizvoljan realan broj, kružnica inverzije te $p_1' = i(p_1)$ i $p_2' = i(p_2)$. Budući da p_1 i p_2 ne prolaze polom inverzije A, to su njihove slike p_1' i p_2' kružnice. Neka su t_1 i t_2 zajedničke tangente kružnica p_1' i p_2'. Ima ih dvije jer se sijeku u dvije točke, prolaze kroz pol inverzije A i imaju još jednu zajedničku točku, a to je slika presječne točke pravaca p_1 i p_2, pa imaju samo vanjske zajedničke tangente. Slike tangenata, $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2)$, su tražene kružnice. Budući da su zadani pravci tangente traženoj kružnici, njezino je središte jednako udaljeno od p_1 i p_2, odnosno ono leži na simetrali kutova što ih tvore zadani pravci (bez presječne točke). Vrijedi i druga inkluzija: Neka je T točka koja leži na simetrali kutova što ih tvore zadani pravci, ali bez presječne točke. Tada je $k(T, d(T, p_1))$ kružnica s traženim svojstvom.



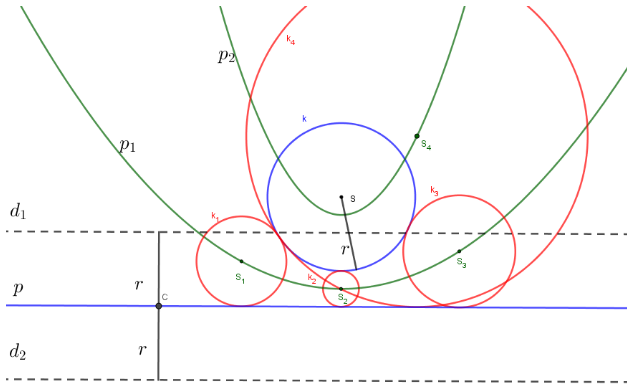
Slika 2.5: Konstrukcija kružnice koja dodiruje zadane pravce p_1 i p_2

Dakle, geometrijsko mjesto središta rješenja su simetrale kutova što ih zatvaraju zadani pravci bez njihovog presjeka, $p_1 \cap p_2$.

Ako vrijedi $p_1 \parallel p_2$, geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je pravac paralelan s $p_1(p_2)$ i od njega udaljen za $\frac{d(p_1,p_2)}{2}$.
Ako vrijedi $p_1 = p_2$, problem se svodi na 2. slučaj Aplolonijeva problema reda 1.

6. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i kružnicu te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je zadan pravac p i kružnica $k = (S, r)$. Odaberimo točku $A \notin k, A \notin p$ koja se nalazi izvan k i neka je $c = k(A, \rho)$ kružnica inverzije, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj. Neka su kružnice $p' = i(p)$ i $k' = i(k)$ inverzne slike zadanih objekata. Sa t_1, t_2, t_3 i t_4 označimo zajedničke tangente kružnica p' i k'. Inverzne slike tih tangenata $t_1' = i(t_1), t_2' = i(t_2), t_3' = i(t_3)$ i $t_4' = i(t_4)$ su kružnice s traženim svojstvom.
Ako je $A \in k$, onda je $k' = i(k)$ pravac (po svojstvu (7) inverzije) i $p' = i(p)$ kružnica. Tada su rješenja inverzne slike tangenata kružnice p' paralelnih s k'.
Ako je $A \in p$, onda je $p' = p$ pravac (po svojstvu (3) inverzije) i $k' =$ kružnica. Tada su rješenja inverzne slike tangenata kružnice k' paralelnih s p'.
Kroz svaku točku ravnine bez unutrašnjosti kružnice k prolazi neko rješenje. Tražena kružnica može dodirivati zadanu kružnicu izvana i iznutra. U slučaju kada tražene kružnice dodiruju kružnicu izvana njihova središta su jednako udaljena od zadane kružnice k i zadanog pravca p, tj. $d(k, T) = d(p, T)$ za svako središte T rješenja problema. Definirajmo $x := d(p, T)$. Tada je $d(S, T) - r = x = d(p, T)$. Ako promatramo umjesto p, pravac d_2 paralelan sa p, udaljen od p za r i sa suprotne strane pravca p od k, onda vrijedi $d(S, T) = r + x = d(p, d_2) + d(p, T) = d(d_2, T)$.



Slika 2.6: Geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju zadanu kružnicu i pravac

Dakle, T je točka jednako udaljena od pravca d_2 i točke S, pa ona leži na paraboli p_1 čija je ravnalica pravac d_2 i žarište točka S. Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je parabola čija je ravnalica pravac d_2 i žarište točka S podskup središta rješenja.

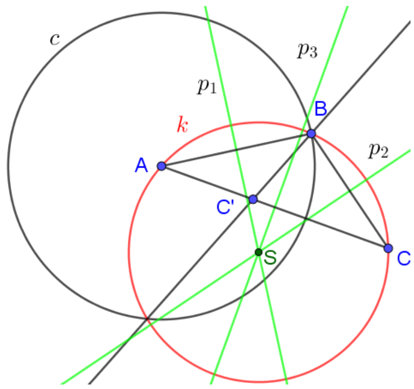
U slučaju kada tražene kružnice dodiruju kružnicu iznutra njihova središta su za r više udaljene od S nego od p, odnosno vrijedi $r + d(S,T) = x$, tj. $d(S,T) = x - r$. Ako promatramo umjesto p, pravac d_1 paralelan sa p, udaljen od p za r i sa iste strane pravca p kao i k, onda vrijedi $d(S,T) = x - r = d(p,T) - r = d(d_1,T)$. Dakle, T je točka jednako udaljena od pravca d_1 i točke S, pa ona leži na paraboli p_2 čija je ravnalica pravac d_1 i žarište točka S. Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je parabola p_2 podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

Budući da jedna od tih mogućnosti vrijedi za svako središte tražene kružnice, to je geometrijsko mjesto središta rješenja problema unija tih parabola, odnosno $p_1 \cup p_2$.

2.3 Apolonijev problem reda 3

U ovom odjeljku ćemo razraditi Aplonijev problem reda 3. Ukupno ih ima deset i za svaki od njih ćemo prvo pokazati egzisteniciju rješenja, koju dokazujemo preko postojanja rješenja Apolonijevog problema nižeg reda, a zatim najelegantniju konstruciju tog rješenja i diskusiju o broju rješenja. U daljnjem tekstu, geometrijsko mjesto središta ćemo kraće označavati GMS.

1. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz tri zadane točke.
Neka su zadane točke A, B i C nekolinearne. Neka su pravci p_1, p_2 i p_3 GMS kružnica koje prolaze, redom, točkama A i B, B i C, C i A. Po rješenju Apolonijevog problema reda 2 kada se radi o dvije točke, znamo da su ti pravci simetrale dužina određene točkama kroz koje prolaze.
Tvrdnja 1. Ako rješenje postoji, tada se središte te kružnice nalazi u presjeku $p_1 \cap p_2 \cap p_3$.
Dokaz. Neka postoji rješenje, tj. kružnica $k = k(S, r)$ koja prolazi zadanim točkama A, B i C. Tada vrijedi $|SA| = |SB|$. To povlači $S \in p_1$. Analogno jednakost $|SB| = |SC|$ povlači $S \in p_2$ i $|SA| = |SC|$ povlači $S \in p_3$. Dakle, $S \in p_1 \cap p_2 \cap p_3$. Tražena kružnica je $k = k(S, |SA|)$ ■
Konstrukcija rješenja:
Sa $c = k(A, |AB|)$ označimo kružnicu inverzije i $C' = i(C)$. Po svojstvu inverzije (8) i (2) tražena kružnica je inverzna slika pravca BC', $k = i(BC')$. Središte kružnice konstruiramo na način koji je objašnjen u prethodnom dokazu.
Time smo pokazali egzistenciju rješenja. Ako su A, B, C kolinearne točke, one ne mogu pripadati istoj kružnici (simetrale dužina su u tom slučaju paralelni pravci pa se ne sijeku). Ako se dvije točke podudaraju, onda se problem svodi na 1. opisani Apolonijev problem reda 2, a ako se podudaraju sve tri,



Slika 2.7: Konstrukcija kružnice kroz tri točke

tada na 1. opisani Apolonijev problem reda 1.

2. Konstruirati kružnicu koja dodiruje zadani pravac te prolazi dvjema zadanim točkama.

Neka su A i B zadane točke te p zadani pravac.

Ovisno o međusobnom položaju zadanih objekata razlikujemo više slučajeva:

1° Neka p ne prolazi točkama A i B, $A \neq B$ i nalaze se s iste strane pravca p.

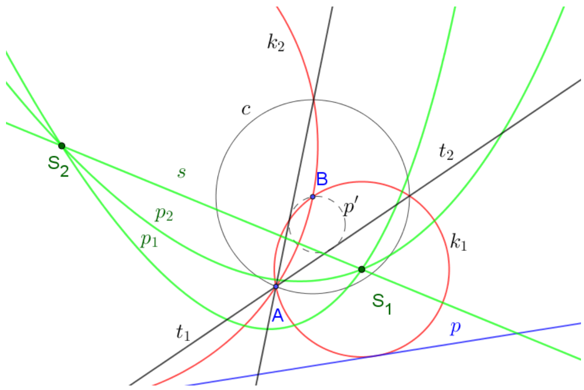
Iz rješenja Apolonijevih problema reda 2 znamo da je GMS kružnica koje prolaze kroz A i dodiruju pravac p prarabola p_1 s ravnalicom p i žarištem A, GMS kružnica koje prolaze kroz B i dodiruju pravac p prarabola p_2 s ravnalicom p i žarištem B i GMS kružnica koje prolaze točkama A i B simetrala s dužine $\overline{AB}$.

Tvrdnja 2. Ako rješenje postoji, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $p_1 \cap p_2 \cap s$.

Dokaz. Neka je $k = k(S, r)$ kružnica s traženim svojstvom. Tada ona dodiruje pravac p i prolazi točkom A, tj. vrijedi $d(S, A) = d(p, A)$, što povlači $S \in p_1$. Analogno se pokaže i $S \in p_2$. Budući da k prolazi točkama A i B, to je S jednako udaljen od obje točke, odnosno $d(A,S) = d(B,S)$ pa je $S \in s$. Dakle, $S \in p_1 \cap p_2 \cap s$. Tražena kružnica je $k = k(S, |SA|)$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja p_1, p_2 i s imaju neprazan presjek.

Neka je $c = k(B, |BA|)$ kružnica inverzije te p' inverzna slika pravca p tj.



Slika 2.8: Konstrukcije kružnice koja dodiruje pravac i prolazi dvjema točkama

$p' = i(p)$ te $A' = i(A)$ i $B' = i(B)$. Tada je p' kružnica koja prolazi polom inverzije B (po svojstvu inverzije (6) i (8)). Povucimo tangente t_1 i t_2 iz točke A na p'. Kružnice s traženim svojstvom su $k_1 = i(t_1)$ i $k_2 = i(t_2)$. Time smo pokazali egzisteniciju rješenja, odnosno $p_1 \cap p_2 \cap s \neq \emptyset$.

Uočimo da rješenja ne mora biti dva, nego može biti i jedno i to u slučaju kada je $AB \parallel p$ (jedna tangenta tada prolazi kroz pol inverzije B i tada je slika te tangente ponovno taj pravac ili, ako promatramo dokaz, simetrala dužine $\overline{AB}$ je okomita na p i može sjeći parabole u samo jednoj točki).

2° U slučaju kada vrijedi $A, B \in p$ i $A \neq B$ rješenja nema. GMS kružnica koje dodiruju p i prolaze kroz A (B) su pravci $q_1(g_2)$, okomice na p kroz $A(B)$. Tada su q_1, q_2 i s različiti paralelni pravci (okomice na isti pravac p)

pa nemaju presjek.

3° Neka je $A \in p (B \in p)$. Tada postoji jedno rješenje: Kada bismo provodili prethodno objašnjenu konstrukciju, kružnica p' prolazi kroz A i tada postoji samo jedna tangenta t u toj točki na p', odnosno postoji jedna kružnica s traženim svojstvom $k = i(t)$.

4° Neka je $A = B$. Tada se problem svodi na 4. Apolonijev problem reda 2.

5° Neka se A i B nalaze s različitih strana pravca p. Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 2. No, budući da se parabole p_1 i p_2 se ne očito ne sijeku, to rješenje ne postoji.

3. Konstruirati kružnicu koja prolazi dvjema zadanim točkama te dodiruje zadanu kružnicu.

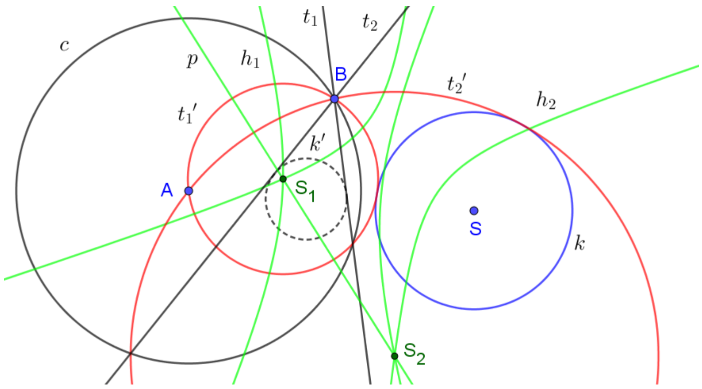
Naka su zadane točke A i B i kružnica $k = k(S, r)$. Broj rješenja ovisi o međusobnom položaju zadanih objekata.

1° Neka su A i B izvan kružnice k. Neka je hiperbola h_1 GMS kružnica koje dodiruju k i prolaze kroz A, hiperbola h_2 GMS kružnica koje dodiruju k i prolaze kroz B te pravac p GMS kružnica koje prolaze točkama A i B.

Tvrdnja 3. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $h_1 \cap h_2 \cap p$.

Dokaz. Neka postoji kružnica $k_1 = k(S_1, r_1)$ s traženim svojstvom. Tada k_1 prolazi kroz A i dodiruje k. Budući da k_1 može k dodirivati izvana i iznutra, to slijedi $d(S_1, A) = d(S_1, S) - r$ ili $d(S_1, A) = d(S_1, S) + r$. Slijedi $|d(S_1, A) - d(S_1, S)| = r$ pa vrijedi $S_1 \in h_1$. Analogno se pokaže $S_1 \in h_2$. Nadalje, k_1 prolazi kroz A i B pa vrijedi $d(A, S_1) = d(B, S_1)$, što povlači $S_1 \in p$. Dakle, $S_1 \in h_1 \cap h_2 \cap p$ i $r_1 = |S_1 A|$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja h_1, h_2 i p imaju neprazan presjek.



Slika 2.9: Kružnica koja dodiruje kružnicu i prolazi dvjema točkama

Neka je $c = k(A, |AB|)$ kružnica inverzije te $k' = i(k)$ kružnica. Iz B povucimo tangente t_1 i t_2 na k'. Tražene kružnice su $t_1' = i(t_1)$ i $t_1' = i(t_2)$. Time je pokazana egzistenicija rješenja, odnosno $h_1 \cap h_2 \cap p \neq \emptyset$.

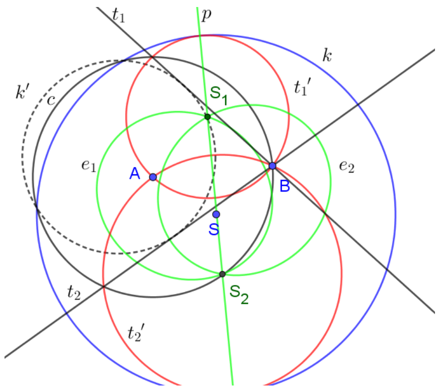
U ovom slučaju postoje dva rješenja i to kada se sijeku grane hiperbola na kojima leže GMS kružnica koje dodiruju kružnicu izvana i kada se sijeku grane hiperbola na kojima leže GMS kružnica koje dodiruju kružnicu iznutra.

$2°$ Neka je A unutar, a B izvan kružnice k. Tada nema rješenja. Slično kao i pod $1°$ se pokaže da ako rješenje postoji, središte te kružnice se nalazi na presjeku $h_2 \cap p \cap e$, gdje je e elipsa (GMS kružnica koje prolaze kroz A i dodiruju k). Sad pokažimo da je taj presjek prazan skup:

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $S_1 = h_1 \cap e \cap p$. Tada vrijedi $||AS_1| + |SS_1|| = r = ||BS_1| - |SS_1||, |AS_1| = |BS_1|$. Slijedi $|AS_1| + |SS_1| = |AS_1| - |SS_1|$ ili $|AS_1| + |SS_1| = -|AS_1| + |SS_1|$. Odnosno $S = S_1$ ili $A = S_1$, što nas dovodi do kontradikcije. ∎

$3°$ Neka se obje točke nalaze na kružnici k. Tada je tražena kružnica zadana kružnica k. Naime, GMS kružnica koje dodiruju k i prolaze kroz $A(B)$ je $AS \setminus A(BS \setminus B)$, a GMS kružnica koje prolaze točkama A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$. Budući da simetrala tetive kružnice prolazi njezinim središtem, to je presjek ta tri GMS točka S, a radijus tražene kružnice je $|SA|$.

4° Neka se točke A i B nalaze unutar kružnice k. Analognom konstrukcijom kao i pod 1° se pokaže da postoje 2 rješenja. U dokazu se kao GMS javljaju dvije elipse, a ne dvije hiperbole i simetrala p.



Slika 2.10: Kružnica koja dodiruje kružnicu i prolazi dvjema točkama

5° Neka se jedna od točaka nalazi na k, a druga izvan k. Analognom konstrukcijom kao i pod 1° se pokaže da postoji 1 rješenje. Naime, tangentu povlačimo iz točke na kružnici, pa postoji samo jedna takva tangenta, te je njezina inverzna slika tražena kružnica.

6° Neka se jedna od točaka nalazi na k a druga unutar k. Tada postoji jedno rješenje. Konstrukcija rješenja analogna slučaju 5°.

7° Ako vrijedi $A = B$, onda se problem svodi na 2. Apolonijev problem reda 2.

4. Konstruirati kružnicu koja prolazi zadanom točkom te dodiruje dva zadana pravca.

Neka je zadana točka A i pravci p_1 i p_2. Ovisno o međusobnom položaju pravaca i točke razlikujemo više slučajeva:

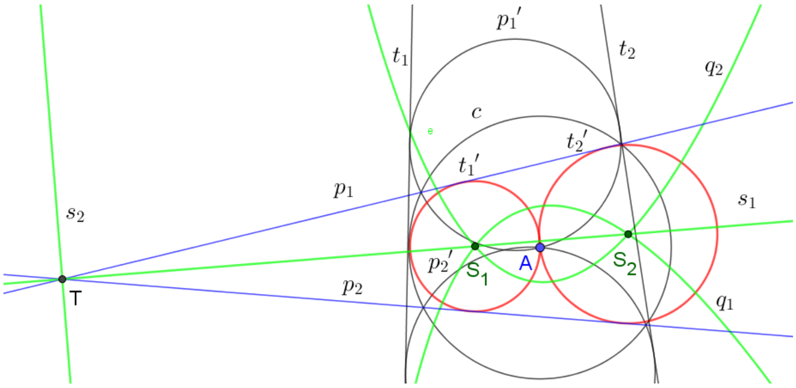
1° Neka vrijedi $p_1 \nparallel p_2$ i A ne pripada pravcima p_1 i p_2. Označimo sa T presjek pravca p_1 i p_2 i sa s_1, s_2 simetrale kutova što ih zatvaraju p_1 i p_2. Neka je $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ GMS kružnica koje dodiruju p_1 i p_2, parabola q_1 GMS kružnica koje dodiruju p_1 i prolaze kroz A i parabola q_2 GMS kružnica koje dodiruju pravac p_2 i prolaze točkom A.

Tvrdnja 4. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2$.

Dokaz. Neka postoji kružnica $k = k(S, r)$, $r > 0$ s traženim svojstvom. Budući da k dodiruje p_1 i p_2, to povlači $d(S, p_1) = d(S, p_2)$ pa je $S \in (s_1 \cup s_2)$. Budući da je $r > 0$, to slijedi $S \neq T (\in s_1 \cup s_2)$. Zaključujemo da vrijedi $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$. Nadalje, k dodiruje pravac p_1 i prolazi točkom A pa vrijedi $d(S, A) = d(S, p_1)$, što povlači $S \in q_1$. Analogno se pokaže da vrijedi i $S \in q_2$. Dakle, $S \in ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2$. Tražena kružnica je $k = k(S, |SA|)$. ∎

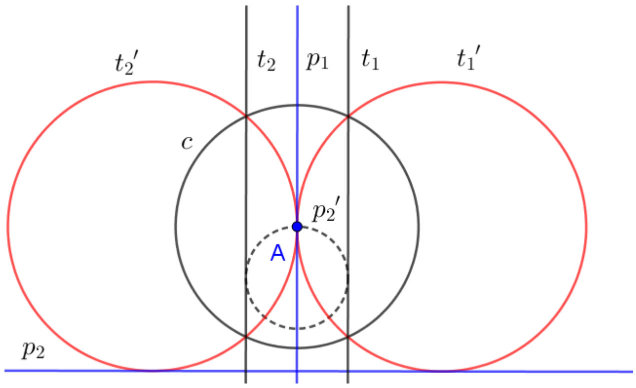
Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}, q_1$ i q_2 imaju neprazan presjek.

Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je $\rho > 0$ proizvoljan realan broj, kružnica inverzije. Neka su $p_1' = i(p_1)$ i $p_2' = i(p_2)$ inverzne slike pravaca. Budući da p_1 i p_2 ne prolaze polom inverzije A, njihove slike p_1' i p_2' su kružnice. Neka su t_1 i t_2 zajedničke tangente kružnica p_1' i p_2'. Ima ih dvije jer se kružnice sijeku u dvije točke, prolaze kroz pol inverzije A i imaju još jednu zajedničku točku, a to je slika presječne točke pravaca p_1 i p_2 pa imaju samo vanjske zajedničke tangente. Slike tangenata, $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2)$, su tražene kružnice. Time je pokazana egzistencija rješenja, odnosno $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$.



Slika 2.11: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dva pravca i prolazi točkom

2° Neka vrijedi $p_1 \parallel p_2$ i A ne pripada pravcima p_1 i p_2 te se nalazi između njih. Konstrukcija je analogna kao pod 1°. Isti je broj rješenja jer treća tangenta prolazi kroz pol inverzije A pa se ona preslikava u samu sebe.
3° Neka vrijedi $p_1 \perp p_2$ i A pripada pravcu $p_1(p_2)$, a ne pripada $p_2(p_1)$. Tada postoje dva rješenja:



Slika 2.12: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dva pravca i prolazi točkom

Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj te $p_2' = i(p_2)$ inverzna slika pravca p_2. Tada je p_2' kružnica. Neka su t_1 i t_2 tangente na p_2' paralelne s p_1. Tada su slike tih tangenata, $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2)$, kružnice s traženim svojstvom.

4° Neka je $p_1 = p_2$. Tada se problem svodi na 5. Apolonijev problem reda 2.

5° Neka je $p_1 \nparallel p_2$ i $\{A\} = p_1 \cap p_2$. Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 4. No, budući da se GMS kružnica koje dodiruju p_1 i prolaze točkom A (okomica kroz A na p_1 bez A), GMS kružnica koje dodiruju p_2 i prolaze točkom A (okomica kroz A na p_2 bez A) i GMS kružnica koje dodiruju p_1 i p_2 (simetrale kutova što ih zatvaraju zadani pravci bez presječne točke A) ne sijeku, to rješenje ne postoji.

6° Neka vrijedi $p_1 \parallel p_2$, A se ne nalazi između pravaca p_1 i p_2, te ne leži ni na jednom od njih. Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 4. No, budući da se parabola koja je GMS kružnica koje dodiruju zadani pravac koji je bliže točki A i pravac koji je GMS kružnica koje dodiruju zadane pravce ne sijeku, to rješenje ne postoji.

7° Neka je $p_1 \parallel p_2$ i $A \in p_1(p_2)$. Tada postoji jedinstveno rješenje: Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije i kružnica $p_2' = i(p_2)$ inverzna slika pravca p_2. Neka su t_1 i t_2 tangente na p_2' paralelne sa p_2. Tada je jedna od tangenata pravac koji prolazi polom inverzije A pa se preslikava u samu sebe, dok je inverzna slika druge tangente kružnica s traženim svojstvom.

5. Konstruirati kružnicu koja prolazi zadanom točkom, dodiruje zadani pravac i kružnicu.

Neka su zadani točka A, pravac p i kružnica $k = k(S, r)$, gdje je $r > 0$. Postoji više slučajeva ovisno o međusobnom položaju zadanih elemenata:

1° Neka vrijedi $A \notin p, k$. Neka je hiperbola h_1 GMS kružnica koje dodiruju k i prolaze točkom A, parabola p_1 GMS kružnica koje dodiruju p i prolaze kroz A i parabola $p_2 \cup p_3$ GMS kružnica koje dodiruju p i k, gdje je parabola

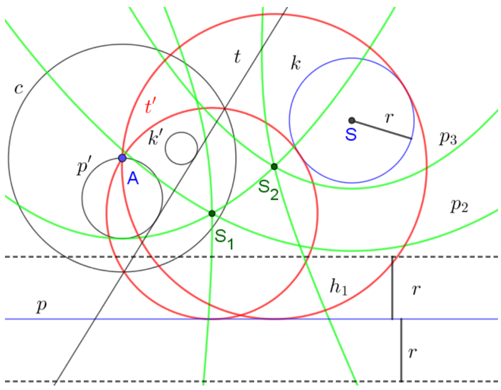
p_2 (p_3) GMS kružnica koje dodiruju kružnicu k izvana (iznutra).

Tvrdnja 5. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3)$.

Dokaz. Neka postoji kružnica $k_1 = k(S_1, r_1)$ s traženim svojstvom. Tada k_1 prolazi kroz A i dodiruje k. Budući da k_1 može dodirivati k izvana i iznutra, to slijedi $d(S_1, A) = d(S_1, S) - r$ ili $d(S_1, A) = d(S_1, S) + r$. Slijedi $|d(S_1, A) - d(S_1, S)| = r$ pa je $S_1 \in h_1$. Nadalje, k_1 dodiruje p i prolazi kroz A, iz čega slijedi da je $d(S_1, A) = d(S_1, p)$. Slijedi $S_1 \in p_1$. Također k_1 dodiruje p i k i može k dodirivati izvana ili iznutra, tj. vrijedi $d(S_1, p) = d(S_1, k)$, odnosno $d(S_1, S) = d(S_1, p) + r$, ili $d(S_1, S) = d(S_1, p) - r$ iz čega slijedi da je $S_1 \in p_2 \cup p_3$. Dakle, $S_1 \in h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3)$ i $r_1 = d(S_1, A)$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja h_1, p_1 i $p_2 \cup p_3$ imaju neprazan presjek.

Neka je $c = k(A, \rho)$ kružnica inverzije s polom u točki A, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj. Neka su $k' = i(k)$ i $p' = i(p)$ inverzne slike zadane kružnice i pravca.



Slika 2.13: Konstrukcije kružnice koja dira pravac, kružnicu i prolazi točkom

Tada su k' i p' kružnice, od kojih p' prolazi polom, a k' ne prolazi. Neka je t zajednička vanjska tangenta kružnica p' i k'. Tada je $t' = i(t)$ tražena kružnica. Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno $h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3) \neq \emptyset$. Uočimo da postoje dvije takve tangente, pa imamo i dvije tražene kružnice. Te dvije tražene kružnice dodiruju zadanu kružnicu izvana. Ukoliko inverzijom preslikamo dvije zajedničke unutarnje tangente (postoje ukoliko se zadani pravac i kružnica ne sijeku), dobijemo dvije kružnice koje dodiruju zadanu kružnicu iznutra. Dakle, postoji najviše 4 rješenja.

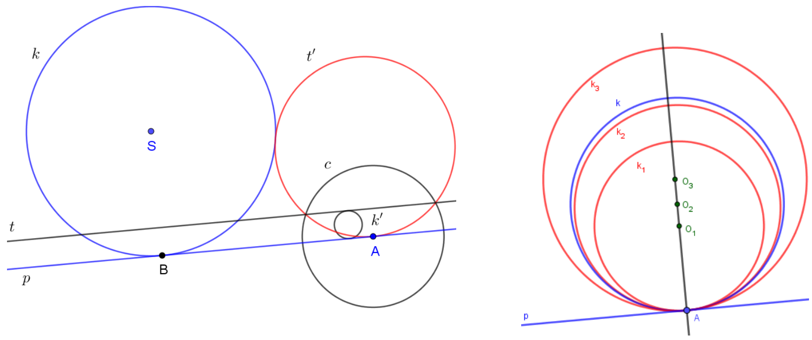
2° Ako su $k \cap p = \emptyset$, A i k sa različite strane pravca p, onda rješenja nema. Također vrijedi Tvrdnja 5., ali se očito se parabole p_1, p_2 i p_3 u ovom slučaju ne sijeku.

3° Ako je $k \cap p \neq \emptyset$, p tangenta od k i ako A ne leži na p i nalazi se izvan kružnice k, onda postoje dva rješenja i to kada k dodiruje traženu kružnicu izvana (iznutra ju ne može dodirivati uz uvjet da dodiruje p).

4° Ako je $k \cap p \neq \emptyset$, p tangenta od k i A ne leži na p i nalazi se unutar kružnice k, onda postoji jedinstveno rješenje. Središte kružnice je presjek okomice u diralištu D na p i simetralom dužine $\overline{DA}$.

5° Ako je $k \cap p \neq \emptyset$, p tangenta od k, $A \in p$ i $A \notin k$ (Slika 2.14.(a)), onda postoji jedinstveno rješenje. Opišimo konstrukciju rješenja: Neka je $c = k(A, \rho)$, $\rho > 0$ proizvoljan realan broj, kružnica inverzije te $k' = i(k)$ inverzna slika od k. Tada je, po svojstvu inverzije (9), k' kružnica. Neka je t tangenta na k' paralelna s pravcem AB. Tada je $t' = i(t)$ tražena kružnica. Naime, t se preslikava u kružnicu koja prolazi polom inverzije A (po svojstvu inverzije (6) i (8)), dodiruje kružnicu k te pravac p.

6° Ako je $k \cap p \neq \emptyset$, p tangenta od k i $A \in p, k$ (Slika 2.14.(b)), onda postoji beskonačno mnogo rješenja: Središta traženih kružnica leže na okomici iz A na p, ali bez točke A.



(a) Točka ne pripada kružnici

(b) Točka pripada kružnici

Slika 2.14: Konstrukcija kružnice koja dodiruje kružnicu, njezinu tangentu p i prolazi točkom sa pravca p

6. Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom, te dodiruje dvije zadane kružnice.

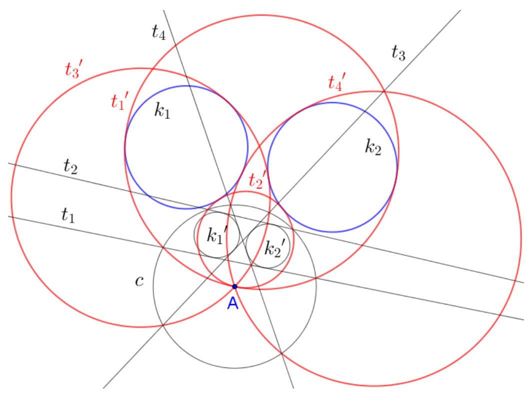
Neka su zadane točka A te kružnice $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$, gdje su $r_1, r_2 > 0$ pozitivni realni brojevi. Promotrimo različite međusobne položaje zadanih objekata i pripadajući broj rješenja:

$1°$ Neka se točka A nalazi izvan zadanih kružnica. Neka je hiperbola h_1 GMS kružnica koje dodiruju k_1 i prolaze točkom A, hiperbola h_2 GMS kružnica koje dodiruju k_2 i prolaze točkom A. Pretpostavimo da se zadane kružnice nalaze jedna izvan druge. Naime, u suprotnom očito rješenja nema. Neka je $h_3 \cup h_4$ GMS kružica koje dodiruju zadane kružnice, gdje je hiperbola h_3 (h_4) GMS kružnica koje dodiruju zadane kružnice izvana ili iznutra (jednu od kružnica izvana, a drugu iznutra).

Tvrdnja 6. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4)$.

Dokaz. Neka postoji kružnica $k = k(S, r)$ s traženim svojstvom. Tada k prolazi kroz A i dodiruje k_1. Budući da k može k_1 dodirivati izvana i iznutra, to slijedi $d(S, A) = d(S, S_1) - r$ ili $d(S, A) = d(S, S_1) + r$. Slijedi $|d(S, A) - d(S, S_1)| = r_1$, tj. $S \in h_1$. Analogno se pokaže da vrijedi $S \in h_2$. Nadalje, k dodiruje k_1 i k_2. Može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati iznutra, a drugu izvana. Ako k dodiruje k_1 i k_2 izvana(iznutra), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = |r + r_1|| - |r + r_2|| = |r_1 - r_2|(||SS_1| - |SS_2|| = |r - r_1|| - |r - r_2|| = | - r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|)$ iz čega slijedi $S \in h_3$. Ako k dodiruje k_1 izvana (iznutra), a k_2 iznutra (izvana), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2(||SS_1| - |SS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = r_1 + r_2)$. Slijedi $S \in h_4$. Dakle, $S \in h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4)$ i $r = |S_1 A|$. ■

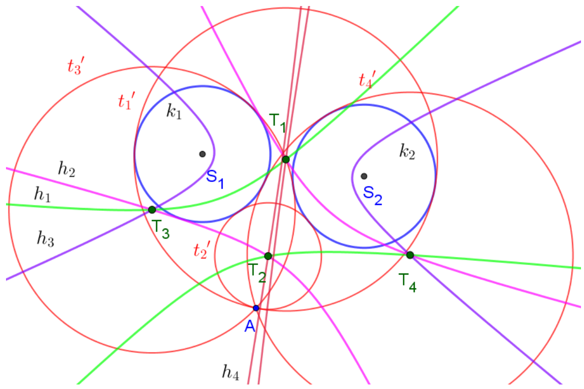
Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja h_1, h_2 i $h_3 \cup h_4$ imaju neprazan presjek.



Slika 2.15: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dvije kružnice i prolazi točkom

Zbog preglednosti slike hiperbole h_1, h_2, h_3 i h_4 su obojane različitim bojama (Slika 2.16).

Neka je $c = k(A, \rho)$, gdje je ρ proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije. Slike inverzije $k_1' = i(k_1)$ i $k_2' = i(k_2)$ su, po svojstvu inver-



Slika 2.16: GMS kružnica koje dodiruju dvije kružnice i prolaze točkom

zije (9), kružnice. Inverzne slike zajedničkih tangenata kružnica k_1' i k_2' su kružnice s traženim svojstvom. Time je pokazana egzistencija rješenja, odnosno $h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4) \neq \emptyset$.

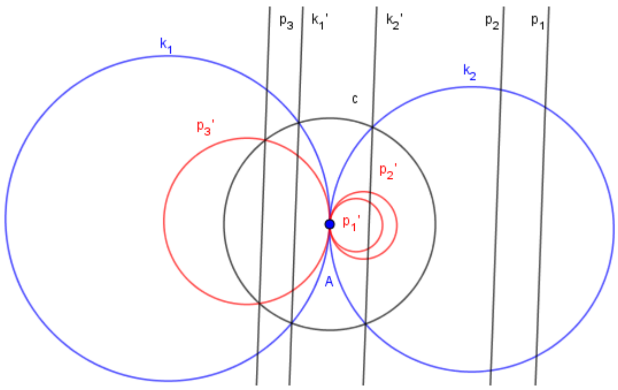
Ovisno o položaju kružnica broj rješenja se razlikuje. Ako se zadane kružnice ne sijeku i $k_1(k_2)$ se ne nalazi unutar $k_2(k_1)$, zajedničkih tangenata je četiri, stoga imamo četiri rješenja. Ako se k_1 i k_2 se dodiruju izvana, onda one imaju tri zajedničke tangente, tj. tri rješenja. U slučaju kada se k_1 i k_2 sijeku u dvije različite točke, onda imaju dvije zajedničke vanjske tangente, tj. postoji dva rješenja.

2° Neka se kružnice k_1 i k_2 ne sijeku i ne leži jedna unutar druge te neka se A nalazi unutar jedne od njih. Tada rješenja nema.

3° Neka kružnice k_1 i k_2 imaju dvije različite zajedničke točke te neka se A nalazi unutar jedne od njih. Tada postoje dva rješenja jer ne postoji kružnica s traženim svojstvom koja dodiruje obje kružnice izvana ili iznutra. Konstrukcija rješenja je analogna onoj pod 1°.

4° Neka se kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana i A nalazi unutar jedne od njih. Tada postoji jedinstveno rješenje, a konstrukcija je analogna onoj pod 1°. Inverzne slike zadanih kružnica također imaju jednu zajedničku točku i u toj

točki zajedničku vanjsku tangentu čija je inverzna slika rješenje problema.
5° Ako se k_1 nalazi unutar k_2 ili k_2 unutar k_1 i točka A unutar obe kružnice, onda rješenja očito nema (inverzne slike kružnica nemaju zajedničkih tangenata). No, ako se A nalazi unutar jedne, a unutar druge kružnice ne nalazi, onda postoji dva rješenja. Konstrukcija rješenja je kao pod 1°.
6° Ako vrijedi $k_1 \cap k_2 = \{A\}$, onda rješenja ima beskonačno mnogo.



Slika 2.17: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dvije kružnice i prolazi točkom

Neka je $c = k(A, \rho), \rho > 0$ proizvoljan realan broj, kružnica inverzije i $k_1' = i(k_1)$ i $k_2' = i(k_2)$ inverzne slike zadanih kružnica k_1 i k_2. Tada su k_1' i k_2', po svojstvu inverzije (7), pravci koji prolaze sjecištima kružnice inverzije i zadanih kružnica i to paralelni jer imaju zajedničku tangentu u polu inverzije A. Inverzna slika bilo kojeg pravca paralelnog s k_1'(i k_2') je kružnica s traženim svojstvom. Takvih pravaca ima beskonačno mnogo, stoga ima beskonačno mnogo rješenja.
7° Neka se k_1 i k_2 ne sijeku i ne leže jedna unutar druge te $A \in k_1(k_2)$. Tada postoji dva rješenja. Konstrukcija rješenja analogna je onoj pod 6°.
8° Neka se k_1 i k_2 sijeku u dvije različite točke te $A \in k_1(k_2)$. Tada postoji dva rješenja. Konstrukcija je analogna onoj pod 1°.

9° Neka se k_1 i k_2 dodiruju izvana i $A \in k_1(k_2)$. Tada postoji jedinstveno rješenje. Konstrukcija kao pod 6° (kružnica $k_1(k_2)$ se preslikava u pravac koji je tangenta kružnici $k_2'(k_1')$).
10° Ako vrijedi $k_1 = k_2$, onda se problem svodi na 2. Apolonijev problem reda 2.

7. Konstruirati kružnicu koja dodiruje tri zadana pravca.

Neka su p_1, p_2 i p_3 zadani pravci. Promotrimo različite međusobne položaje zadanih pravaca:
1° Neka pravci p_1, p_2, p_3 nisu međusobno paralelni. Neka je $\{A\} = p_1 \cap p_2$, $\{B\} = p_2 \cap p_3$ i $\{C\} = p_3 \cap p_1$. Time je određen trokut $\triangle ABC$. Neka su $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}, (s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}, (s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$, gdje su s_1 i s_2 simetrale kutova što ih zatvaraju p_1 i p_2, s_3 i s_4 simetrale kutova što ih zatvaraju p_2 i p_3, s_5 i s_6 simetrale kutova što ih zatvaraju p_1 i p_3, GMS kružnica koje dodiruju pravce p_1 i p_2, p_2 i p_3, p_1 i p_3, redom.
Tvrdnja 7. Ako rješenje postoji, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $((s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}) \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\})$.
Dokaz. Neka je $k = k(S, r)$ kružnica s traženim svojstvom. Tada k dodiruje p_1 i p_2. Slijedi da je $d(S, p_1) = d(S, p_2)$ pa S leži na simetrali kuta što ga zatvaraju p_1 i p_2, tj. je $S \in s_1 \cup s_2$. Budući da je S središte kružnice, to je $S \neq T$. Stoga vrijedi $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}$. Analogno se pokaže da vrijedi $S \in (s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}$ i $S \in (s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$. Dakle, $S \in ((s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}) \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\})$ i $r = d(S, p_1)$.
■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}$, $(s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}$ i $(s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$ imaju neprazan presjek.

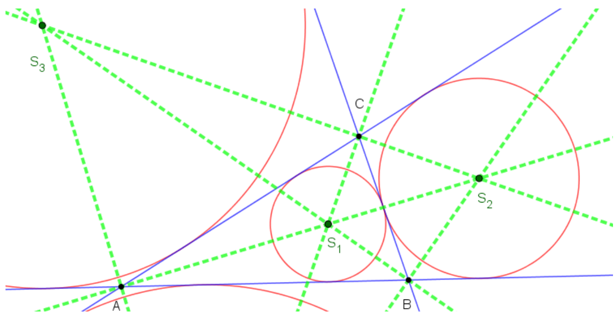
Neka su s_1, s_2, s_3 simetrale unutrašnjih kutova trokuta $\triangle ABC$ i to pri vrhu A, B, C redom. Neka je $\{S\} = s_1 \cap s_3$, o okomica na p_1 kroz S i $o \cap p_1 = \{N\}$.

T: Tražena kružnica je $k = k(S, |SN|)$.

Dokaz. Neka je $k = k(S, |SN|)$. Budući da je $S \in s_1$ to je $d(S, p_1) = d(S, p_2)$. Nadalje vrijedi $S \in s_3$ pa je $d(S, p_2) = d(S, p_3)$. Zaključujemo da je $d(S, p_1) = d(S, p_2) = d(S, p_3)$ i da su pravci p_1, p_2 i p_3 tangente kružnici $k = k(S, |SN|)$, što smo i trebali pokazati. ■

Time je pakazana egzistencija rješenja, odnosno $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}) \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\} \neq \emptyset$.

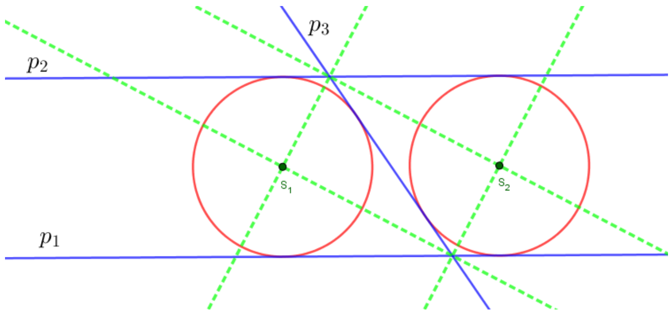
Kružnica iz prethodnog dokaza je upisana kružnica trokutu $\triangle ABC$ i ona je jedinstveno određena. Postoje još tri kružnice s traženim svojstvom, to su trokutu pripisane kružnice. Njihova središta konstruiramo kao sjecišta vanjskih kutova trokuta.



Slika 2.18: Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca

2° Ako vrijedi $p_1 \parallel p_2$ i $p_2 \nparallel p_3$, onda postoje dva rješenja zadanog problema. Središta traženih kružnica konstruiramo kao sjecišta simetrala kutova što ih zatvaraju pravci p_1 i p_3 te p_2 i p_3.

3° Neka vrijedi $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$ i $p_1 \neq p_2 \neq p_3$. Tada također vrijedi Tvrdnja 7, ali GMS kružnica koje dodiruju pravce p_1 i p_2, p_2 i p_3, p_3 i p_1 su međusobno različiti paralelni pravci, a njihov presjek je prazan pa rješenja nema.



Slika 2.19: Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca

4° U slučaju da su dva pravca jednaka, problem se svodi na 5. slučaj prethodnog odjeljka.

5° Ako vrijedi $p_1 = p_2 = p_3$ problem se svodi na 2. Apolonijev problem reda 1.

8. Konstruirati kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice i zadani pravac.

Neka su zadane kružnice $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$, gdje su r_1 i r_2 proizvoljni pozitivni realni brojevi, te pravac p. Neka vrijedi $r_1 < r_2$. Promotrimo različite međusobne položaje zadanih objekata:

1° Neka se k_1, k_2 i p međusobno ne sijeku te se kružnice nalaze jedna izvan druge. Neka su $p_1 \cup p_2$ i $p_3 \cup p_4$ GMS kružnica koje dodiruju kružnicu k_1 i pravac p, k_2 i p, redom gdje su $p_1(p_3)$ GMS kružnica koje dodiruju $k_1(k_2)$ izvana i $p_2(p_4)$ GMS kružnica koje dodiruju $k_1(k_2)$ iznutra. Neka je $h_1 \cup h_2$, gdje je hiperbola h_1 GMS kružnica koje dodiruju k_1 i k_2 izvana ili iznutra, a hiperbola h_2 GMS kružnica koje dodiruju jednu od zadanih kružnica izvana, a drugu iznutra, GMS kružnica koje dodiruju k_1 i k_2.

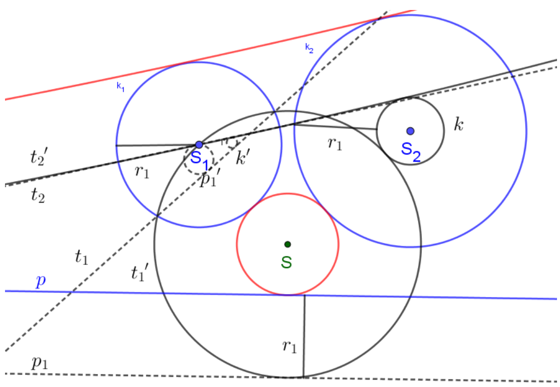
Tvrdnja 8. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $(p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2)$.

Dokaz. Neka je $k = k(S, r)$ kružnica s traženim svojstvom. Tada k dodiruje k_1 i k_2. Može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati iznutra, a drugu izvana. Ako k dodiruje k_1 i k_2 izvana(iznutra), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = |r + r_1|| - |r + r_2|| = |r_1 - r_2|(||SS_1| - |SS_2|| = |r - r_1|| - |r - r_2|| = | - r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|)$, iz čega slijedi $S \in h_1$. Ako k dodiruje k_1 izvana (iznutra), a k_2 iznutra (izvana), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2(||SS_1| - |SS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = r_1 + r_2)$ pa slijedi $S \in h_2$. Dakle, $S \in h_1 \cup h_2$. Nadalje, k dodiruje p i k_1 i može k_1 dodirivati izvana ili iznutra, tj. vrijedi $d(S, p) = d(S, k_1)$, tj. $d(S, S_1) = d(S, p) + r$, ili $d(S, p) = d(S, S_1) + r$, tj. $d(S, S_1) = d(S, p) - r$ iz čega slijedi da je $S \in p_1 \cup p_2$. Analogno se pokaže da vrijedi $S \in p_3 \cup p_4$. Dakle, $S \in (p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2)$ i $r = d(S, p)$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja $p_1 \cup p_2$, $p_3 \cup p_4$ i $h_1 \cup h_2$ imaju neprazan presjek.

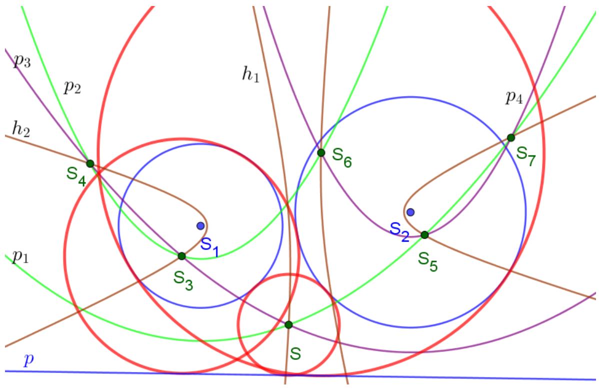
Zadaća u ovom slučaju ima najviše rješenja i to njih osam:

a) Umjesto kružnica k_1 i k_2 i pravca p promatramo točku S_1, kružnicu $k = k(S_2, r_2 - r_1)$ i pravac p_1, gdje je p_1 paralelan s pravcem p i udaljen od njega za r_1, ali se nalazi sa suprotne strane od one gdje se nalaze k_1 i k_2.



Slika 2.20: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije kružnice i pravac

Možemo reći da smo k_1 i k_2 "stisli" za r_1 i dobili točku S_1 i kružnicu k. Sada



Slika 2.21: GMS kružnica koje dodiruju dvije kružnice i pravac

je problem sveden na 5. Apolonijev problem reda 3. Međutim, dva rješenja od njih četiri propadaju, pa nam ostaju samo dva. Inverzne slike zajedničkih vanjskih tangenti kružnica $p_1' = i(p_1)$ i $k' = i(k)$ (kružnica inverzije je proizvoljna kružnica c sa središtem u S_1) stisnemo za r_1 i na taj način dobijemo tražene kružnice koje dodiruju zadane kružnice izvana.

Zbog preglednosti na slici Slika 2.21 GMS kružnica za pojedine Apolonijeve probleme reda 2 su obojana različitim bojama i nisu istaknute sve tražene kružnice već samo njih tri iako ima više vidljivih središta traženih kružnica.

b) Dodatna dva rješenja dobijemo ako k_1 i k_2 suzimo za r_1 i promatramo pravac p_1 paralelan s p i udaljen od njega za r_1, a nalazi se s iste strane kao i zadane kružnice. Koristimo oznake kao pod a). Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverznim slikama dviju zajedničkih unutarnjih tangenata inverznih slika k' i p_1' povećamo radijus ("napušemo") za r_1 i dobijemo tražene kružnice.

c) Promatramo točku S_1, kružnicu $k = k(S_2, r_1 + r_2)$ i pravac p_1 paralelan s p i udaljen od njega za r_1, a nalazi se s iste strane kao i zadane kružnice. Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverzne slike dviju zajedničkih vanjskih tangenata inverznih slika

k' i p_1' "napušemo" za r_1. Tako dobivene dvije kružnice su rješenje zadaće.
d) Promatramo točku S_1, kružnicu $k = k(S_2, r_2 + r_1)$ i pravac p_1, gdje je p_1 paralelan s pravcem p i udaljen od njega za r_1, ali se nalazi sa suprotne strane od one gdje se nalaze k_1 i k_2. Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverzne slike dviju zajedničkih unutarnjih tangenata inverznih slika k' i p_1' "stisnemo" za r_1 i dobijemo posljednja dva rješenja zadaće.
Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno $(p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2) \neq \emptyset$.
2° U slučaju kada se kružnice k_1 i k_2 sijeku ili kada se k_1 nalazi unutar k_2 i p siječe k_2 provodimo prethodno opisanu konstrukciju, samo što se broj rješenja razlikuje ovisno o dodatnim međusobnim odnosima zadanih objekata.
3° Ako je k_1 unutar k_2 i p ne siječe k_2, onda rješenja očito nema.
4° Ako je $k_1 = k_2$, onda se problem svodi na 6. Apolonijev problem reda 2.

9. Konstruirati kružnicu koja dodiruje dva zadana pravca i zadanu kružnicu.

Neka su zadani pravci p_1 i p_2 te kružnica $k = k(S, r)$, gdje je r proizvoljan pozitivan realan broj.
1° Neka se zadani pravci sijeku. Označimo sa T njihov presjek i sa s_1, s_2 simetrale kutova što ih zatvaraju p_1 i p_2. Neka je $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ GMS kružnica koje dodiruju p_1 i p_2, $q_1 \cup q_2$ GMS kružnica koje dodiruju p_1 i k, gdje je parabola $q_1(q_2)$ GMS kružnica koje k dodiruju izvana (iznutra) i $q_3 \cup q_4$ GMS kružnica koje dodiruju pravac p_2 i k, gdje je parabola $q_3(q_4)$ GMS kružnica koje k dodiruju izvana (iznutra).
Tvrdnja 9. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap (q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4)$.

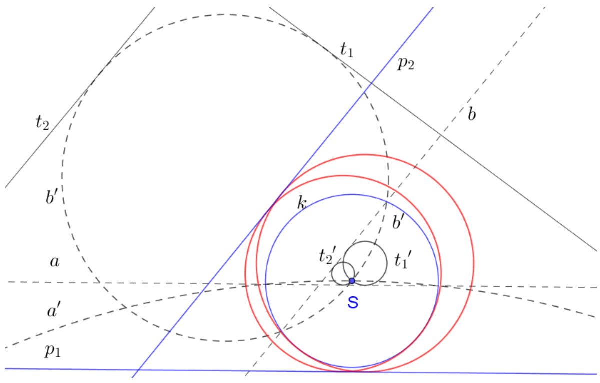
Dokaz. Neka je $k_1 = k(S_1, r_1)$ kružnica s traženim svojstvom. Tada k_1 dodiruje p_1 i p_2. Slijedi $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2)$ pa je $S_1 \in (s_1 \cup s_2)$. Budući da je $r_1 > 0$, to slijedi $S_1 \neq T(\in s_1 \cup s_2)$. Zaključujemo da vrijedi $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$. Nadalje, k_1 dodiruje p_1 i k, i k dodiruju izvana ili iznutra čega slijedi da je $d(S_1, p_1) = d(S_1, k)$, odnosno $d(S_1, S) = d(S_1, p_1) + r$, ili $d(S_1, p_1) = d(S_1, S) + r$, tj. $d(S_1, S) = d(S_1, p_1) - r$. Slijedi $S_1 \in q_1 \cup q_2$. Analogno se pokaže da vrijedi $S_1 \in q_3 \cup q_4$. Dakle, $S_1 \in (q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4) \cap ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\})$ i $r = d(S, p_1)$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja $q_1 \cup q_2$, $q_3 \cup q_4$ i $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ imaju neprazan presjek.

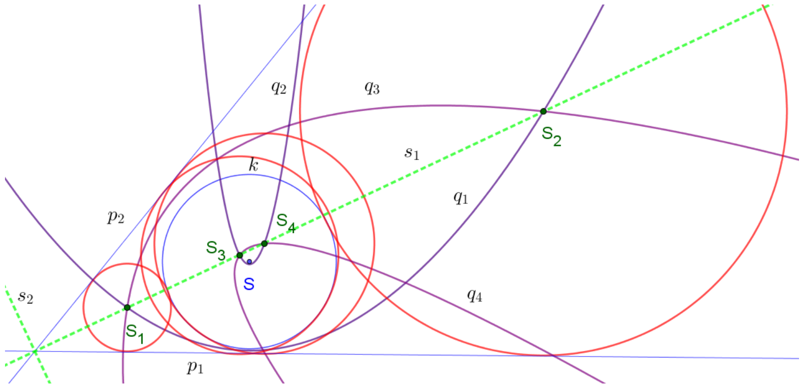
U konstrukciji rješenja kružnicu k promatramo kao točku S (suzimo je za radijus $r, S = k(S, r - r)$).

Slično kao kod 8. Apolonijevog problema reda 3, promatramo pravce a i b paralelne pravcima p_1 i p_2, redom, udaljene od njih za r. Kako za svaki od zadanih pravaca postoji po dva takva, imamo 4 različite kombinacije konstrukcije. Za svaku od tih konstrukcija postoji po dva rješenja, što je ukupno osam. Pokažimo konstrukciju rješenja za jednu kombinaciju:

Neka su p_1, p_2, k, a i b kao na sljedećoj slici:



Slika 2.22: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dva pravca i kružnicu



Slika 2.23: GMS kružnica koje dodiruju dva pravca i kružnicu

Neka je k kružnica inverzije i kružnice $a' = i(a)$, $b' = i(b)$ inverzne slike pravaca a i b. Budući da se a i b sijeku, sijeku se i a' i b' pa imaju samo vanjske zajedničke tangente, označimo ih sa t_1 i t_2. Neka su $t_1' = i(t_1)$, $t_2' = i(t_2)$ inverzne slike tih tangenata. Dva rješenja zadaće su kružnice koje dobijemo povećanjem radijusa kružnicama t_1' i t_2' za r.

Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno $(q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4) \cap ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \neq \emptyset$.

2° Ako su pravci paralelni, onda postoje četiri rješenja. Konstrukcija je analogna prethodno opisanoj, ali neki slučajevi propadaju.

3° Ako vrijedi $p_1 = p_2$, onda se problem se svodi na 6. Apolonijev problem reda 2.

Deseti Apolonijev problem reda 3 je originalni Apolonijev problem.

10. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice.

Neka su zadane kružnice $k_1 = k(S_1, r_1)$, $k_2 = (kS_2, r_2)$ i $k_3 = k(S_3, r_3)$, gdje su r_1, r_2, r_3 proizvoljni pozitivni realni brojevi te r_3 najmanji među njima.

1° Neka niti jedna od kružnica nije sadržana ni u jednoj od preostale dvije te neka se ne sijeku. Neka je $h_1 \cup h_2$, gdje je hiperbola h_1 GMS kružnica koje dodiruju k_1 i k_2 izvana ili iznutra, a hiperbola h_2 GMS kružnica koje jednu od k_1 i k_2 dodiruju izvana, a drugu iznutra, GMS kružnica koje dodiruju k_1 i k_2. Analogno definiramo $h_3 \cup h_4$, GMS kružnica koje dodiruju k_2 i k_3 i $h_5 \cup h_6$, GMS kružnica koje dodiruju k_1 i k_3.

Tvrdnja 10. Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u spresjeku $(h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6)$.

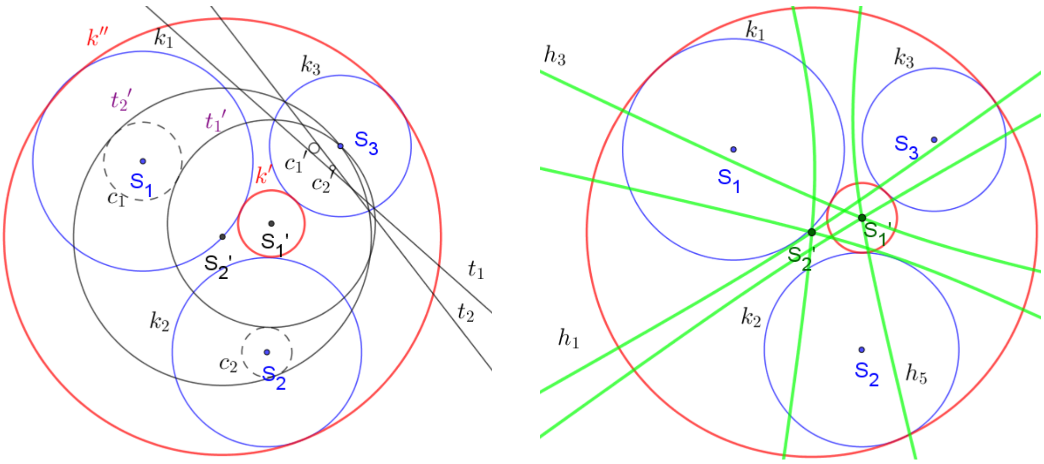
Dokaz. Neka je $k = k(S, r)$ kružnica s traženim svojstvom. Tada k dodiruje k_1 i k_2 i može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati iznutra, a drugu izvana. Ako k dodiruje k_1 i k_2 izvana(iznutra), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = |r + r_1|| - |r + r_2|| = |r_1 - r_2|(||SS_1| - |SS_2|| = |r - r_1|| - |r - r_2|| = |-r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|)$, iz čega slijedi $S \in h_1$. Ako k dodiruje k_1 izvana (iznutra), a k_2 iznutra (izvana), onda vrijedi $||SS_1| - |SS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2(||SS_1| - |SS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = r_1 + r_2)$ pa slijedi $S \in h_2$. Dakle, $S \in h_1 \cup h_2$. Analogno se pokaže da vrijedi $S \in h_3 \cup h_4$ i $S \in h_5 \cup h_6$. Zaključujemo da je $S \in (h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6)$ i $r = |SS_1|$. ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja $h_1 \cup h_2, h_3 \cup h_4$ i $h_5 \cup h_6$ imaju neprazan presjek.

Tražene kružnice ćemo konstruirati slično kao i u prethodna dva problema. Rješenja ima najviše osam, a broj ovisi o međusobnom odnosu zadanih objekata. Neka je k_3 kružnica inverzije (za kružnicu inverzije možemo odabrati bilo koju kružnicu sa središtem u S_3).

a) Neka su $c_1 = k(S_1, r_1 - r_3)$ ("sužena kružnica k_1 za r_3") i $c_2 = k(S_2, r_2 - r_3)$ ("sužena kružnica k_2 za r_3") i kružnice $c_1' = i(c_1)$ i $c_2' = i(c_2)$ njihove inverzne slike. Sa t_1 i t_2 označimo vanjske zajedničke tangente kružnica c_1' i c_2'. Kružnice $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2)$ dodiruju c_1 i c_2 izvana i prolaze kroz S_3

kao na sljedećoj slici pod a):



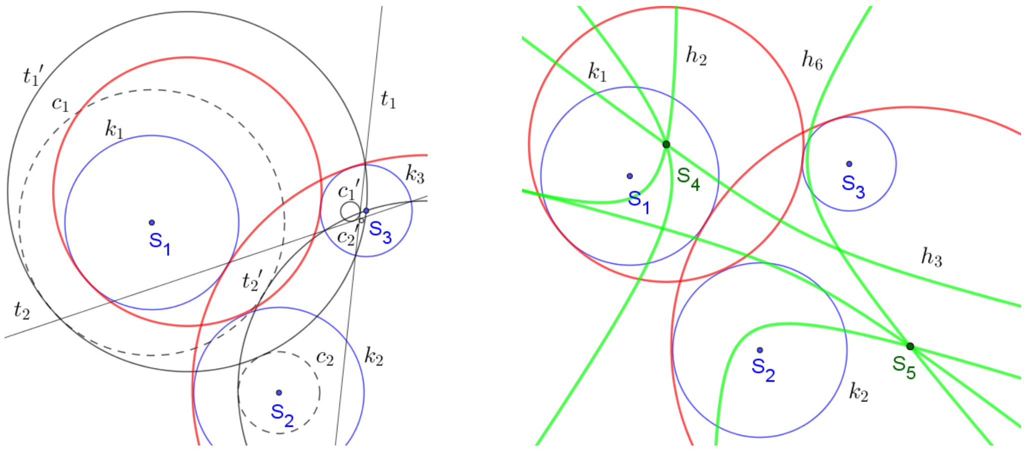
(a) Konstrukcija (b) GMS

Slika 2.24: Kružnice koje dodiruju tri kružnice izvana i iznutra

Ako t_1' "stisnemo" za r_3, onda dobijemo traženu kružnicu, označimo je sa k', koja dodiruje zadane kružnice izvana. Ako t_2' "napušemo" za r_1, onda dobijemo traženu kružnicu, označimo je sa k'', koja dodiruje zadane kružnice iznutra.

Na slici Slika 2.24 b) je prikazan presjek hiperbola h_1, h_3 i h_5 koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice k_1 i k_2, k_2 i k_3, k_3 i k_1 dodiruju izvana ili iznutra.

b) Neka je $c_1 = k(S_1, r_1 + r_3)$ i $c_2 = k(S_2, r_2 - r_3)$. Nastavak konstrukcije se provodi analogno prethodnom slučaju, ali sada odabiremo unutarnje zajedničke tangente t_1 i t_2 kružnica c_1' i c_2'. Neka su sve oznake i objekti kao na slici 2.25. Slika tih tangenata, t_1' i t_2', su kružnice koje dodiruju c_1 i c_2 i prolaze polom inverije S_3. Ako t_1' "stisnemo" za r_3, onda dobijemo jedno rješenje i to kružnicu koja k_1 dodiruje iznutra, a k_2 i k_3 izvana. Ako t_2' "napušemo" za r_3, onda dobijemo još jedno rješenje i to kružnicu koja k_1 dodiruje izvana, a k_2 i k_3 iznutra.



(a) Konstrukcija (b) GMS

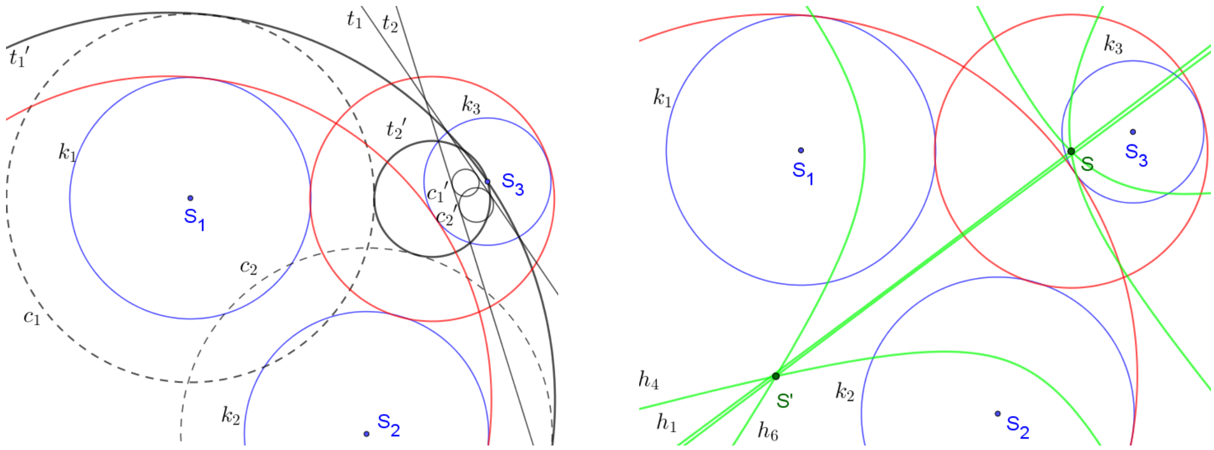
Slika 2.25: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

Na slici Slika 2.25 b) je prikazan presjek hiperbola h_2, h_3 i h_6 koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana i iznutra, k_2 i k_3 dodiruju izvana ili iznutra, k_3 i k_1 dodiruju izvana i iznutra.

c) Neka su $c_1 = k(S_1, r_1 + r_3)$ i $c_2 = k(S_2, r_2 + r_3)$. Sa t_1 i t_2 označimo zajedničke vanjske tangente kružnica $c_1' = i(c_1)$ i $c_2' = i(c_2)$. Njihove inverzne slike $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2')$ dodiruju c_1 i c_2 te prolaze polom inverzije S_3. Neka je nihov položaj kao na slici 2.26 a).

Tražene kružnice dobijemo tako da t_1' "stisnemo" za r_3 (dobivena kružnica dodiruje k_1 i k_2 iznutra, a k_3 izvana) i t_2' "napušemo" za r_3 (dobivena kružnica dodiruje k_1 i k_2 izvana, a k_3 iznutra).

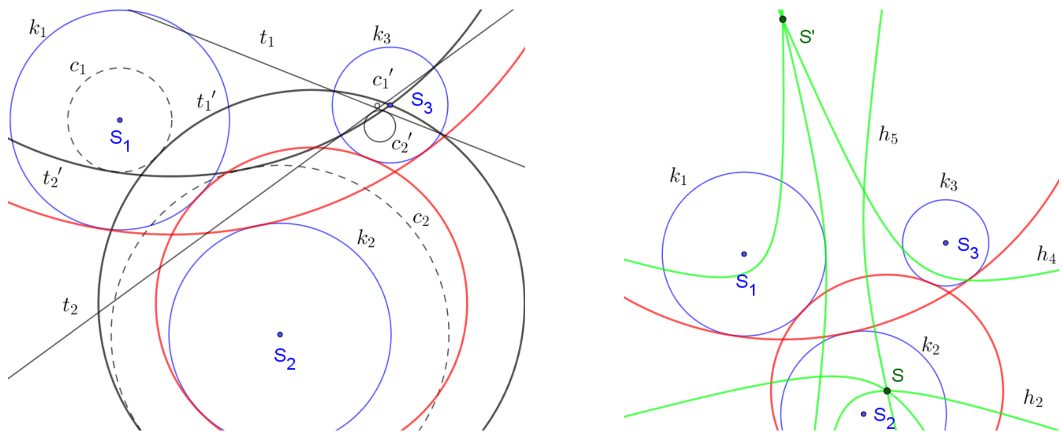
Na slici Slika 2.26 b) je prikazan presjek hiperbola h_1, h_4 i h_6 koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana ili iznutra, k_2 i k_3 dodiruju izvana i iznutra, k_3 i k_1 dodiruju izvana i iznutra.



(a) Konstrukcija (b) GMS

Slika 2.26: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

d) Neka su $c_1 = k(S_1, r_1 - r_3)$ i $c_2 = k(S_2, r_2 + r_3)$. Neka su t_1 i t_2 zajedničke unutarnje tangente kružnica $c_1' = i(c_1)$ i $c_2' = i(c_2)$. Neka je odnos svih objekata kao i na sljedećoj slici:



(a) Konstrukcija (b) GMS

Slika 2.27: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

Inverzne slike tangenata $t_1' = i(t_1)$ i $t_2' = i(t_2)$ su kružnice koje dodiruju c_1 i c_2 te prolaze polom inverzije. Ako "napušemo" t_2' za r_3 dobijemo jedno

rješenje zadaće i to kružnicu koja dodiruje k_1 i k_3 iznutra, a k_2 izvana. Osmo rješenje je kružnica koju dobijemo kada t_1' "stisnemo" za r_3 i ona dodiruje k_1 i k_3 izvana, a k_2 iznutra.
Na slici Slika 2.27 b) je prikazan presjek hiperbola h_2, h_4 i h_5 koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana i iznutra, k_2 i k_3 dodiruju izvana i iznutra, k_3 i k_1 dodiruju izvana ili iznutra.
Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno $(h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6) \neq \emptyset$.
Ovisno o međusobnom položaju zadanih kružnica broj rješenja se mijenja, dok se rješenja konstruiraju na isti način koji je poviše opisan. Ukoliko su dvije kružnice jednake, problem se svodi na treći problem iz prethodnog odjeljka, a ako su sve tri jednake, onda na treći problem iz prvog odjeljka.

2.4 Apolonijev problem reda $n \geq 4$

U ovom odjeljku ćemo razraditi najjednostavniji Aplonijev problem reda 4, i to kada su zadane četiri točke. Ukupno ih ima petnaest.

Konstruiraj kružnicu koja dodiruje četiri zadane točke.
Neka su zadane točke A, B, C i D.
Razlikujemo više slučajeva:
1° Neka su zadane točke različite i nisu kolinearne.
Zadanim točkama je određen četverokut $ABCD$. Rješenje problema postoji, i to samo jedno, ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivni.
Možemo promatrati također i dužine određene tim točkama kojih ima $\binom{4}{2}$=6.
Simetrale tih dužina su GMS kružnica koje dodiruju točke koje određuju tu

dužinu (Apolonijev problem reda 2). Očito je sjecište tih simetrala i GMS kružnica koje dodiruju sve četiri zadane točke. Možemo ovaj problem promatrati i kao Apolonijeve probleme reda 3 ako gledamo GMS kružnica koje dodiruju po tri točke. Njih ima $\binom{4}{3}$=4. GMS tih kružnica je samo jedna točka (središte trokutu opisane kružnice), a presjek ta četiri GMS-a je neprazan samo ako se sve četiri točke podudaraju i to je središte rješenja sva četiri problema reda 3 i problema reda 4.
$2°$ Neka su zadane točke različite i kolinearne. Tada rješenja nema.
$3°$ U slučaju kada su neke od zadanih točaka jednake, problem se svodi na Apolonijev problem nižeg reda.
U usporedbi s Apolonijevim problemima nižeg reda gdje smo naišli na konike prilikom određivanja GMS kružnica koje dodiruju zadane objekte, ovdje prilikom promatranja najjednostavnijeg Apolonijeva problema reda 4, dolazimo do najviše jednog rješenja. Iz tog razloga nam nije interesantno promatrati Apolonijeve probleme reda $n \geq 4$.

2.5 Daljnje generalizacije Apolonijeva problema

Kut presjeka između tražene kružnice i zadanih elemenata (pravca i kružnice) u dosadašnjim razmatranjima je $0°$.
Stavljajući proizvoljni kut $\alpha \in [0,\ 180°\rangle$ pod kojim tražena kružnica siječe zadane kružnice, odnosno pravce, dobivamo još jednu generalizaciju Apolonijeva problema reda n.
Analogno, ali znatno složenije, razmatranje možemo provesti i za ovaj problem koristeći metodologiju identičnu onoj koju smo upotrijebili pri rješavanju Apolonijeva problema za $\alpha = 0°$.

Poglavlje 3

Zaključak

Originalni Apolonijev problem glasi: *"Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"*.

U ovom radu smo taj problem generalizirali i to na način da smo uz kružnice promatrali pravce i točke (možemo ih zamisliti kao kružnice s radijusom beskonačno i nula) i to kada je zadan jedan, dva, tri ili više objekata. Nazvali smo ih Apolonijevim problemom reda n, gdje je $n \in N$ broj zadanih objekata. Uz samu konstrukciju traženih kružnica, koju smo uglavnom izvodili koristeći metodu inverzije, promatrali smo i geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju zadane objekte, uz korištenje metode geometrijskih mjesta točaka. Posebno su interesantna GMS kružnica s traženim svojstvom koja se javljaju u Apolonijevim problemima reda 2. Naime, kao GMS kružnica se pojavljuju konike, stoga se svaka konika alternativno može definirati kao GMS kružnica koje su rješenje određenog Apolonijevog problema reda 2.

Za Apolonijeve probleme reda 3 posebno smo dokazivali egzistenciju rješenja. Pokazali smo, ne samo da je presjek tri konike ili presjek pravca i konika neprazan, već da može biti i višečlan skup, što je jako zanimljivo jer to nije nešto za očekivati i nije jednostavno za zamisliti.

Apolonijevi problemi reda $n \geq 4$ nam nisu interesantni iz razloga što rješenje postoji samo u specifičnim položajima zadanih objekata.
Također smo ostavili prostora za razmatranje i razmišljanje što da smo tražili kružnice koje ne dodiruju zadane objekte, već ih sijeku pod varijabilnim kutom $\alpha \in [0,\ 180^\circ\rangle$ i to koristeći identičnu metodologiju kao i u ovom radu.
Naime, u tom slučaju kao zadane objekte ne promatramo točke.

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1991.

[2] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, 1996.

[3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 1994.

[4] N. Koceić Bilan, I. Mirošević, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, math.e 27, 2015.

[5] N. Koceić Bilan, N. Smajlić, L. Trombetta Burić, *Konstruktivna geometrija u nastavi matematike*, Osječki matematički list, 2013.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

GENERALIZACIJA APOLONIJEVA PROBLEMA

Antonija Guberina

Sažetak:

Apolonijev problem glasi: *"Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"*. U uvodnom dijelu definiramo Apolonijev problem reda $n, n \in N$ i na taj ga način generaliziramo. Detaljno obrađujemo metodu inverije jer pomoću nje konstruiramo večinu Apolonijevih problema. U glavnom dijelu posebno promatramo sve Apolonijeve probleme reda 1, 2 i 3 te određujemo GMS rješenja što je posebno interesantno za Apolonijeve probleme reda 2 jer se kao GMS javljaju konike i time dobivamo alternativnu definiciju konika. Važno je istaknuti da se kao GMS rješenja Apolonijevih problema reda 3 javljaju presjeci konika, konika i pravca iako je za očekivati da taj presjek bude prazan. Za Apolonijev problem reda 4 promatramo samo slučaj kada su zadane četiri točke. Apolonijeve probleme reda $n \geq 4$ nije interesantno jer rješenja postoje samo u posebnim slučajevima. Također se iznosi ideja za daljne razmatranje stavljajući proizvoljni kut $\alpha \in [0,\ 180^\circ\rangle$ umjesto $\alpha = 0^\circ$, što smo u radu promatrali.

Ključne riječi:

inverzija, kružnica, pravac, točka, geometrijsko mjesto središta, dodir, elipsa, hiperbola, parabola, rješenje

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Podatci o radu:

53 stranice, 37 slika

Mentor: prof. dr. sc., Nikola Koceić Bilan

Članovi povjerenstva: dr. sc., Goran Erceg mag. math, Ivan Jelić

Povjerenstvo za diplomske radove je prihvatilo ovaj rad 29.01.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

GENERALIZATION OF APOLLONIUS PROBLEM

Antonija Guberina

Abstract:

Apollonius problem claims "Construct circles that are tangent to three given circles in a plane." In introduction we define Apollonius problem order $n, n \in N$ and we generalize it on that way. We deal in detail inversion because using that method we construct most of Apollonius problems. In main section, we are observing all Apollonius problems order 1, 2 and 3 and dealing with GCL solutions which are especially interesting for Apollonius problems order 2 because as GCL we have conics and because of that we are getting alternative definition of conics. It is important to say that solutions of Apollonius problems order 3 we get intersections of conics, conics and lines although we can expect that intersection is empty. For Apollonius problem of order 4 we study case with four given points. Apollonius problems of order n¿4 are not so interested for study because solutions exist only in special cases. Also, we represent idea for further consideration putting arbitrary angle $\alpha \in [0,\ 180°\rangle$ instead $\alpha = 0°$, which we have been considering in this text.

Key words:

inversion, circle, line, point, geometric center location(GCL), touch, ellipse, hyperbola, parabola, solution

Specifications:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

53 pages, 37 pictures

Mentor: Professor, Nikola Koceić Bilan

Committee: Ph.D., Goran Erceg M.S., Ivan Jelić

This thesis was approved by a Thesis commettee on 29.01.